学 位 論 文 題 名

On spatially nondecaying Navier-Stokes flow

(空間的に減衰しないナビエ・ストークス流)

学位論文内容の要旨

流体力学の基礎方程式であるナビエ・ストークス方程式の非定常問題の解の存在および一意性について考える. 流速ベクトルの初期値を与えて, ナビエ・ストークス方程式を満たす流速ベクトルおよび圧力を求める. この問題をナビエ・ストークス方程式のコーシー問題と呼ぶ.

どのような初期値に対してコーシー問題のなめらかな解が存在するかという問題は, H. Fujita-T. Kato (1964) による半群論を用いた作用素論的方法を端緒として発展してきた. 彼らは, ソレノイダルベクトル場の方向への 2 乗可積分関数の空間 L^2 におけるヘルムホルツ射影作用素を用いてナビエ・ストークス方程式から圧力項を消去した. そして, ナビエ・ストークス方程式を流速のみを未知関数とする空間変数関数値の抽象的發展方程式とみなすことにより, なめらかな時間局所解の一意的存在, および初期値が小さい時のなめらかな時間大域解の一意的存在を示した. 半群論の枠組みにおいてナビエ・ストークス方程式を取り扱ったこの L^2 理論は, T. Kato (1984) および Y. Giga-T. Miyakawa (1985) により, p 乗可積分関数の空間 L^p ($1 < p < \infty$) における理論として完成された.

しかし, 初期値が空間的に減衰しない場合, 初期値の持つエネルギーは有限ではなく, 通常ヘルムホルツ分解の理論が展開されている L^p ($1 < p < \infty$) 空間では取り扱うことができない. また, 線形化方程式の解作用素であるストークス半群の生成も空間的に減衰しない関数の空間においては難しい.

当研究の目的は, 空間的に減衰しない初期値に対するナビエ・ストークス方程式の可解性を示すことである. ここではまず, 本質的有界な関数, すなわち, L^∞ に属する関数を初期値として扱った. 本質的有界な関数の空間は周期関数だけでなく, 周期を持たずに減衰しない関数を含んでいる. そのため, コンパクトな領域上の問題に帰着することができず, 新たな取り扱いが必要である.

半群論によるナビエ・ストークス方程式の解の存在証明で必須なのは, 線形化方程式の解作用素であるストークス半群の評価, そして, ストークス半群とヘルムホルツ射影作用素の 2 つの作用素を含んだ非線形項の評価である.

領域が全空間であるコーシー問題の場合, 線形化方程式はストークス方程式ではなく, より扱いやすい熱方程式となり, 熱核の L^1 ノルムが 1 であることから容易に線形項である熱作用素を L^∞ で評価できる. しかし, 非線形項にはヘルムホルツ射影作用素が含まれている. ヘルムホルツ射影作用素は特異積分作用素であるリース作用素による表示を持つが, L^p ($1 < p < \infty$) で有界であるリース作用素は L^∞ では有界ではない.

そこで、ナビエ・ストークス方程式の非線形項に元々含まれる空間一階の微分に着目した。熱核の空間微分をハーディ空間 $\mathcal{H}^1$ 上で評価し、ハーディ空間の双対が有界平均振動関数の空間 BMO であることを用いて、空間微分と熱作用素およびヘルムホルツ作用素の三つ組の作用素が全体として本質的有界な関数の空間 L^∞ において有界であることを示した。この結果、有界で一様連続な初期値に対するなめらかな時間局所解の一意的存在を示すことができた。半群論と特異積分作用素の理論に個別に取り組むのではなく、ナビエ・ストークス方程式の非線形項の構造を用いることによって、無限遠で減衰しない有界一様連続な初期値に対しての可解性を示すことができた。

次に、半空間領域における初期境界値問題を考えた。初期値に減衰を仮定せずに可解性を示すことを目的とした。境界条件はディリクレ条件を仮定した。半空間上のストークス方程式については、W. Desch-M. Hieber-J. Prüss (2001) が L^∞ における半群の生成を示しており、非線形項の評価が問題となった。しかし、非線形項に含まれるヘルムホルツ作用素が L^∞ では有界ではないという、全空間の場合と同じ理由でそのままではこの半群理論を適用できない。また、半空間領域では法線方向の空間微分とヘルムホルツ作用素が可換ではないため、全空間の場合のように熱核の空間微分に対するハーディ空間上の評価を用いることができない。そこで、ヘルムホルツ作用素に平滑化近似を加えた近似方程式を導入した。また、ヘルムホルツ作用素と法線方向の微分が含まれる項を、法線方向の微分単独の項と、接線方向の微分とヘルムホルツ作用素が含まれる項に分離する公式を作った。この公式とストークス半群の微分に対する Y. Shimizu の評価を用いて非線形項を L^∞ において評価できた。その結果、有界で一様連続な初期値に対するなめらかな時間局所解の一意的存在を示すことができた。

最後に、ある固定軸を中心に等速で回転する場におけるナビエ・ストークス方程式の初期値問題を考えた。回転流体の運動には見かけの力であるコリオリ力の考慮が必要になる。コリオリ力の大きさは回転速度に比例する。A. Babin, A. Mahalov, B. Nicolaenko らは、回転速度が十分大きい時になめらかな時間大域解が存在することを周期 L^2 空間に属する初期値に対して示している。この結果は、3次元回転流体の流れが、回転速度が速くなるにつれ回転軸方向変数に依存しない2次元流に近い流れに移行することにより、その存在時間が延びることを物理的には示唆している。当研究では、周期性や減衰を仮定しない初期値に対する時間局所的な可解性を目的とした。時間大域的な可解性については論じていない。次の結果を示した。初期値の回転軸方向変数に依存する部分が斉次ベゾフ空間 $\dot{B}_{\infty,1}^0$ に属する場合に、なめらかな時間局所解が一意的に存在する。斉次ベゾフ空間 $\dot{B}_{\infty,1}^0$ は L^∞ よりも小さな関数空間であるが概周期関数など周期を持たず減衰しない関数を含んでいる。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 小 澤 徹

副 査 教 授 儀 我 美 一

(東京大学大学院数理科学研究科)

副 査 教 授 神 保 秀 一

副 査 教 授 中 村 玄

副 査 助 教 授 利 根 川 吉 廣

学 位 論 文 題 名

On spatially nondecaying Navier-Stokes flow

(空間的に減衰しないナビエ・ストークス流)

流体力学の基礎方程式のひとつである非圧縮性粘性流体の運動を記述するナビエ・ストークス方程式には、その非線形性のため未解決な問題が多い。

著者はナビエ・ストークス方程式の初期値問題を初期値が無限大で必ずしも減衰しない場合の時間局所解の一意存在の問題に取り組んだ。この種の問題は初期速度が概周期関数の場合も扱うとなると避けて通れない問題である。しかし、従来のナビエ・ストークス方程式の理論は主に初期値をエル・ピー空間からとるなどとしているため、空間無限大で減衰しない初期値については適用できないものが多かった。1970年代の研究でも取り上げられたこともあったが深く考察されてこなかった。

著者は初期速度に単に有界性の仮定しかおらずに局所解の一意存在を証明した。ナビエ・ストークス方程式の解を構成しようと積分方程式の研究をしてみると、しばしばリース作用素といった有界関数の空間では連続にならないものが現れる。このため有界関数の範囲で解をつくる事は熱方程式の様に易しくはない。

著者は、熱核の微分が単に可積分になるだけではなくハーディ空間の元になることに着目してこの難点を克服した。また、速度場が無限大で減衰しない場合には、圧力に対して何らかの条件を課しないと解の一意性は一般に成立しない。著者はこの問題にも取り組み解の一意性の為の圧力に対する自然な十分条件を求めている。

その後著者は、この問題を半空間で境界上ディリクレ型の条件を課した場合に取り扱っている。半空間になるとナビエ・ストークス方程式の線形化であるストークス方程式は熱方程式とは本質的に異なるものになる。そのため熱核をそのまま用いる事はできない。著者はヘルムホルツ作用素と微分とが可換ではないが、同様の作用素を用いて作用素と微分の順が入れ換えられる事を発見した。それにより半空間においても、初期速度が有界であれば時間局所的に初期値境界値問

題が一意にとけることを証明した。著者とは独立にロシアの研究者がこの問題を全く異なる方法で解決したが、著者の方法はより関数解析的方法で半空間以外の他の領域への応用が期待されている。

著者はアリゾナ州立大学のマハロフ教授と回転場の中での流体方程式の可解性の問題についても考察した。地球上の海流の様に回転しているものの表面を流れる流体については、回転と同じ枠組みで運動を追跡すると、その運動を支配する方程式はコリオリ力を伴ったナビエ・ストークス方程式になる。コリオリ力の項は回転軸のベクトルと速度場との外積の形で現れる。この項は速度場に対して線形ではあるが0階の項である。このような項が現れると有界関数の範囲での可解性は困難である。なぜならば熱核自身はハーディ空間の元とみなせないからである。著者はこの困難に対して斉次ベゾフ空間を用いた。ベゾフ空間自身はナビエ・ストークスの解析に対して広く用いられているが、微分の階数ゼロ、積分指数無限大、総和指数1のものは、あまり用いられていない。一方、この空間には三角級数を始め概周期関数が多数含まれている。著者はこのような初期値に対して局所解を構成した。同様な研究は澤田宙広博士によっても得られてはいるが初期条件の仮定が著者の方がより一般的である。また存在時間に対しても著者はコリオリ力の項を摂動項とみなさなかつたので既存のものよりも良い結果になっている。

このように著者はナビエ・ストークス方程式や、それに関連するコリオリ力付ナビエ・ストークス方程式に対して初期エネルギーが有限でない場合、特に単に初速度が有界としたり関数の減衰を課さないベゾフ空間での元である時に時間的局所解を構成している。

これらの結果は既に世界に広く知られていてマハロフ教授との共同研究もその実績が元となっている。

著者は初速度が無限大で減衰しない場合のナビエ・ストークス方程式とその関連する方程式の新知見を得たもので、非線形解析学への貢献するところとなるものがある。

よって著者は、北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格があるものと認める。