

学 位 論 文 題 名

連続－離散混合力学系におけるフラクタル集合

学位論文内容の要旨

連続変数と離散変数が混在する現象の解明と応用が、異なる多くの分野で問題になっている。例えば、量子計算機の基礎となる量子現象は、連続変数である状態密度の時間発展を記述するブロッホ方程式を離散的なパルス列による切り換えを行うことで生じる。また、ナノテクノロジーとして活発に研究されているマイクロ電気機械系（MEMS）・ナノ電気機械系（NEMS）では、電気伝導に寄与する離散変数である電子の個数が、微小機械や単分子の連続的な力学運動によって大きく変化する。また、ポストゲノムの大きな研究課題である細胞内のDNA・蛋白質・糖鎖・脂質などの超分子系の相互作用ダイナミクスは、Glassモデルなどの微分方程式で記述できることが知られており、連続的な超分子系の運動と離散的な遺伝子発現の相互作用が重要となる。また、情報化にともなう工学機械システムの制御においては、コンピュータの急速な普及によって、連続的に動作する機械系をデジタル信号によって離散的に制御するという要求が増大している。さらに、脳科学においても、ヒトの脳において計画・判断を司っている前頭前野が、連続的な運動機能を司っている運動野に指令を送り、それを離散的に切り換えることで複雑な運動制御を実現していると考えられている。このような多くの異なる分野の現象を統一的に理解するためには、連続変数と離散変数が混在したダイナミクスを扱う理論体系が必要である。要素集団の時間発展を理論的に取り扱う学問体系として非線形動力学（力学系）があるが、これは系の非線形性に由来する解のカオティックな挙動や分岐現象の分類・特徴付けなどを通じて、現実の様々な複雑な現象を統一的に理解するための体系を作り出すことを目指している。力学系では、連続力学系と離散力学系は別々に研究されて来たため、両者が混在する場合についての研究は従来ほとんどなされていない。

以上を背景として、本研究では、連続-離散混合力学系の理論的枠組みの構築を目的として、常微分方程式の切り換えによって普遍的に生じるフラクタル集合に関する以下の三つの研究を行った。まず第一に、フラクタルの自己相似性を定量化するためにフラクタル次元を用いた解析を行った。その結果、ある条件のもとでフラクタル次元が理論的に導出され、それを二次元線形系と非線形Duffing系における数値実験によって検証した。第二に、入力切り換えを確率的に決定するフィードフォワードシステムと、系の状態によって決定論的に切り換えを行うフィードバックシステムとの関係をフラクタルの観点から解析した。その結果、後者のダイナミクスは前者におけるフラクタル集合に包含されることを明らかにした。第三に、微分方程式の切り換えによって生じるフラクタル集合を実験的に検証するために、電気回路とヒト脳電図（EEG）を用いた実験を行った。その結果、双方の系において入力系列に対応した階層的なフラクタル集合が得られた。

本論文は全9章から構成されている。

第1章では、本研究の背景および目的を述べる。

第2章では、離散-連続混合力学系の一般的な特性を理解するために、確率的切り換え入力を受ける力学系を記述する理論的枠組みを導入し、系の振る舞いをベクトル場の切り換えによって生成される円筒空間上の軌道集合と、反復関数によって生成されるポアンカレ断面上の点集合によって理解できることを示す。また、反復関数が縮小条件を満たす時、各集合がフラクタル集合上を遷移することを理論的に示す。

第3章では、フラクタル集合の自己相似性の複雑さを定量的に評価する標準的な指標となっている様々なフラクタル次元について説明し、その一般的表式である一般化次元を導入する。最後に、従来のフラクタル次元に関する理論的枠組みと距離の縮小率を用いて一般化次元の理論式を解析的に導出する。

第4章では、確率的切り換え入力を受ける線形系におけるフラクタル集合に対し、フラクタル次元を用いた定量的解析を行う。具体例として二次元線形系におけるポアンカレ断面上の点集合に対して相関次元を計算したところ、その切り換え時間長依存性に異常性が生じることが示された。この異常性を説明する理論式を成分次元の方法を適用して解析的に導出し、その原因が、特定の方向における縮小率の違いと、点集合のオーバーラップにあることを明らかにした。

第5章では、確率的切り換え入力を受ける非線形系におけるフラクタル集合に対し、フラクタル次元を用いた定量的解析を行う。一般に非線形系においては距離の縮小率が一意に定まらないため、第3章で行った方法で理論式を求めることはできない。そこで、縮小性が各方向に平均的に一様であると仮定することで、系の散逸係数を用いた次元の理論式を解析的に導出した。例としてDuffing振動子系における相関次元を計算し、この理論式と一致する結果を得た。

第6章では、離散ダイナミクスを持つ上位モジュールと連続ダイナミクスを持つ下位モジュールからなる離散-連続混合力学系を導入し、理論解析と計算機実験を行う。その結果、上位モジュールが下位モジュールを確率的に切り換える場合にはフラクタル集合が得られるが、その状態に依存して決定論的に切り換えを行う場合、系の振る舞いは確率的に切り換えた場合に生成されるフラクタルの部分集合上を遷移し、さらにパラメータを変化させることで分岐現象を通して多様な応答が生成され得ることを明らかにした。

第7章では、フラクタル集合上の遷移が実際の物理系に存在することを示すために、電気回路を用いた検証実験を行う。二種類の入力を直列LCR回路に対し確率的に入力させ、コンデンサの両端電圧を測定した。その結果、状態空間中の軌道集合がフラクタル集合上を遷移することが示され、その相関次元は第3章で得られた理論式と一致する結果を得た。

第8章では、フラクタル集合上の遷移が、次々と切り換えられた入力の系列を処理する場合に重要な役割を担うという作業仮説から、ヒトEEG計測を用いた検証実験を行う。刺激系列ごとに別々の行動を行う系列弁別課題を実行する被験者のEEGを計測し、刺激に対する脳活動を反映した事象関連電位の各時刻における頭皮上電位分布のトポグラフを計算した。その結果、各刺激系列に依存する時空間ダイナミクスが観測された。

第9章では、本研究で得られた成果についてまとめ、その考察と展望について述べる。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 郷 原 一 寿

副 査 教 授 石 政 勉

副 査 教 授 堤 耀 広

副 査 助 教 授 西 口 規 彦

学 位 論 文 題 名

連続－離散混合力学系におけるフラクタル集合

天体の運動に関する三体問題を解決するため、19世紀後半にポアンカレが創始した非線形動力学（力学系）は、20世紀に入って理論的に体系化された。この体系は、カオスなどに代表される非線形現象の解析に広く用いられてきており、その発展は数学、物理学、生物学、医学、経済学、情報工学など幅広い異なる学問分野に影響を与えている。力学系においては常微分方程式系で表現される連続力学系と写像系で表現される離散力学系が別々に研究されて来たため、両者が混在する場合についての研究は従来ほとんどなされていないが、近年、量子計算機、ナノ電気機械系（NEMS）、生体超分子系、デジタル制御系、脳科学など非常に広い学問領域において、連続変数と離散変数の相互作用ダイナミクスが問題となっている。これらの系の振る舞いを理解するためには、連続変数と離散変数が混在したダイナミクスを扱う理論体系が必要である。

本論文ではこれらを背景にして、連続-離散混合力学系の理論的枠組みの構築を目的とし、常微分方程式の切り換えによって普遍的に生じるフラクタル集合に関する理論解析と実験的研究を行い、連続-離散混合力学系の振る舞いに対する新たな知見を得た。主な研究結果は、以下の3点である。まず、常微分方程式の切り換えによって生ずる解集合のフラクタル次元をある条件のもとで解析的に導き、数値実験によってそれを検証した。次に、連続変数と離散変数が混在する閉じたシステムのダイナミクスが、開いたシステムのダイナミクスに包含されることを示した。そして、常微分方程式の切り換えによって生成されるフラクタル集合を、電気回路とヒト脳電図（EEG）において実験的に検証した。

本論文は全9章から構成されている。

第1章では、本研究の背景および目的を述べる。

第2章では、確率的切り換え入力を受ける力学系に対する一般的な理論的体系をまとめ、そのダイナミクスがフラクタル集合によって特徴付けられることを示した。

第3章では、フラクタル集合の自己相似性の複雑さを定量的に評価するフラクタル次元を導入し、写像の縮小率を用いてフラクタル次元が解析的に導けることを示した。

第4章では、線形力学系における解集合のフラクタル次元が不連続的に変化する異常性を数値計算によって示した。さらに、この異常性を説明する理論式を成分次元の方法により解析的に導出し、その原因が、特定の方向における縮小率の違いと、点集合のオーバーラップにあることを明らかにした。

第5章では、非線形力学系における解集合のフラクタル次元を円筒状態空間の特徴とポアンカレ写像の等方的縮小性を利用して解析的に導出した。さらに、代表的な非線形系である Duffing 振動子系におけるフラクタル次元を数値計算し、それが解析的に導いた次元と良く一致することを示した。

第6章では、離散変数で記述される上位モジュールと連続変数で記述される下位モジュールからなる連続-離散混合力学系のダイナミクスは、上位モジュールが確率的に切り換えられた場合に得られるフラクタル集合に包含されると同時に、分岐現象を通じて多様な応答を生成できることを示した。

第7章では、切り換え入力を受ける電気回路系の状態がフラクタル集合上を遷移することを実験的に検証した。さらに、得られた解集合のフラクタル次元が理論値と良く一致することを示した。

第8章では、刺激系列ごとに別々の行動を行う系列弁別課題を実行するヒトの EEG 計測を行い、脳活動を反映した事象関連電位の時空間ダイナミクスが各刺激系列に対する依存性を持っていることを示した。

第9章では、本研究の総括を行った。

これを要するに、著者は連続-離散混合力学系におけるフラクタル集合に関して理論的および実験的考察を行い、連続ダイナミクスと離散ダイナミクスの相互作用系に対する基本的特徴の一端を明らかにしたものである。この知見は、非線形、非平衡、開放系を対象とする複雑系の解明に貢献するとともに、非線形動力学、応用物理学の発展に寄与するところ大なるものがある。

よって著者は、北海道大学博士（工学）の学位を授与される資格あるものと認める。