

学 位 論 文 題 名

Strongly Supercommuting Self-Adjoint Operators

(強超可換自己共役作用素)

学位論文内容の要旨

ヒルベルト空間上の線形作用素の理論において、自己共役作用素は最も重要な作用素のクラスのひとつである。特に、2つの自己共役作用素の間の強可換性の概念は、関数解析の様々な局面で本質的な役割を演じている。この概念は素朴な意味での可換性という概念よりも強い可換性の概念であり、広汎な作用素解析が展開できるという意味で強力なものである。他方、2つの自己共役作用素の間には、強反可換性という概念もある。これは通常の反可換性という概念の中核を抽出した概念といえる。強可換性は作用素論の発展の初期に導入されたが、強反可換性の登場は1983年のF. H. Vasilescuの論文 (Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 28 (1983), 77-91) まで待たなくてはならなかった。このような歴史的背景もあって、強可換性と強反可換性の2つの概念は別個のものとして扱われてきた。

一方、量子論において超対称性という重要な概念がある。これは、数学的には通常の意味での可換性と反可換性を平等に取り扱う概念である。超対称的量子論は、現在までに大きな成功をおさめてきた。このことから、強可換性と強反可換性は統一的に取り扱うことができるという期待が生まれる。

本論文の主な目的は、強可換性と強反可換性を統一的に取り扱うことが可能な理論を建設し、この理論をいくつかの物理的に重要なモデルに応用することである。特に、超対称的場の量子論への応用を意識しており、後述の超第2量子化の理論は超対称的場の量子論との相性が非常に良い。

次数付けされたヒルベルト空間において、強可換性と強反可換性の概念はより一般的な概念から派生することを示した。この一般的な概念を、強超可換性と呼んでいる。この概念の導入により、強可換性と強反可換性を統一的に取り扱うことが可能になった。また、強超可換な自己共役作用素に関する作用素解析を展開した。その結果を用いて2つの自己共役作用素が強超可換になるためのいくつかの必要十分条件を定式化した。さらに、分解可能な自己共役作用素の強超可換性を調べた。これは、応用の際非常に有益である。

次数付けされたヒルベルト空間上の閉作用素の超第2量子化の理論も議論した。通常の第2量子化は、ヒルベルト空間 $\mathcal{X}$ と $\mathcal{X}$ 上の閉作用素 T のペア $(\mathcal{X}, T)$ に対して、ボゾン・フォック空間 $\mathcal{F}_b(\mathcal{X})$ あるいはフェルミオン・フォック空間 $\mathcal{F}_f(\mathcal{X})$ とそれぞれのヒルベルト空間上の特別な形をした閉作用素 $d\Gamma_b(T)$ あるいは $d\Gamma_f(T)$ のペア $(\mathcal{F}_b(\mathcal{X}), d\Gamma_b(T)), (\mathcal{F}_f(\mathcal{X}), d\Gamma_f(T))$ を与えることであった。これに対して、超第2量子化とは、一言で述べるならば、次数付けされたヒルベルト空間 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ とその上の閉作用素 A のペア $(\mathcal{H}, A)$ に対して、超対称フォック空間と呼ばれるヒルベルト空間 $\mathcal{F}_{\infty}(\mathcal{H})$ と $\mathcal{F}_{\infty}(\mathcal{H})$ 上の閉作用素 $d\Gamma_{\infty}(A)$ のペア

$(\mathcal{F}_{\infty}(\mathcal{H}), d\Gamma_{\infty}(A))$ を与えることにより得られる。この $d\Gamma_{\infty}(A)$ を構成する際、超強可換な自己共役作用素の理論が威力を発揮する。超第2量子化は、以下に述べる理由により通常の第2量子化の一般化と見做すことができることを示した： $\mathcal{F}_{\infty}(\mathcal{H})$ から $\mathcal{F}_b(\mathcal{H}_0) \otimes \mathcal{F}_f(\mathcal{H}_1)$ へのユニタリー作用素 U で $A = A_0 \oplus A_1$ という形の自己共役作用素に対して $U d\Gamma_{\infty}(A) U^{-1} = d\Gamma_b(A_0) \otimes I + I \otimes d\Gamma_f(A_1)$ が成立する。さらに、 A, B を $\mathcal{H}$ 上の強超可換な自己共役作用素とすると、その超第2量子化 $d\Gamma_{\infty}(A), d\Gamma_{\infty}(B)$ も強超可換であることも証明した。この事実は、超対称的場の量子論への応用の際に重要である。

これまでに述べた超強可換な自己共役作用素の理論の応用として、以下の3つのものについて議論した。

- (1) 超対称的場の量子論
- (2) ボソンとフェルミオンが相互作用している系
- (3) 特異なゲージ場の影響下で運動する N 粒子系の Dirac-Weyl 作用素

(1) と (2) は、超第2量子化の理論の直接の応用である。超第2量子化の言語を用いることにより既存の記述よりも見通しが良くなり数学的構造が統一的に把握できること、また、今までに知られていた結果に関するより簡潔な別証明を与えることができることを示した。このような見方はこれまでになかったものであり、強超可換性及び超第2量子化の理論の有効性的一端を示している。

(3) は、平面内に N 個の荷電粒子があり、各粒子の存在する場所に平面に垂直に磁場が貫いているような特異な系の解析である。この系は分数統計粒子と関連していると考えられており、物理学者による発見法的な議論がこれまでになされてきたが、数学的に厳密な仕事はなかった。従って、以下に述べる結果は新しいものである。この系で特に重要な対象は、Dirac-Weyl 作用素である。考察している系は N 粒子系であるから、Dirac-Weyl 作用素も N 個存在する。この Dirac-Weyl 作用素達がある条件の元で、自己共役であり、さらに、互いに強反可換であることを証明した。この事実を証明する際に、先に述べた強超可換な自己共役作用素の理論が本質的な役割を演じている。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 新 井 朝 雄

副 査 教 授 岸 本 晶 孝

副 査 助教授 山ノ内 毅 彦

学 位 論 文 題 名

Strongly Supercommuting Self-Adjoint Operators

(強超可換自己共役作用素)

ヒルベルト空間上の線形作用素の理論において、自己共役作用素は、量子物理学等への応用も含めて、最も重要なクラスのひとつである。自己共役作用素に対しては、スペクトル定理という強力な定理が成立し、このために種々の詳しい解析が可能となる。

線形作用素の可換性あるいは反可換性は重要な概念であるが、非有界作用素の場合には、これらの概念はそのままではあまり有用ではない。しかし、自己共役作用素については、強可換性と強反可換性という有用な概念—通常の可換性あるいは反可換性よりも強い可換性あるいは反可換性の概念—があり、これらはスペクトル理論において重要な役割を演じることが知られている。だが、従来、これらの2つの概念は別々に考察されてきた。本論文の著者は、次数つきヒルベルト空間において強超可換性という新しい概念を導入し、強可換性と強反可換性を統一的に取り扱うことが可能な新しい理論を建設した。

応用として、次数つきヒルベルト空間上のフォック空間論において超第2量子化という新しい量子化の理論を展開し、そのひとつの応用として、超対称的場の量子論の新しい数学的定式化を与えた。特に、1990年前後にA. Araiによって導入されていた無限次元ディラック作用素が超第2量子化の形で表せることを発見したことは特筆すべきである。

さらに、別の応用として、2次元の多体ゲージ量子力学を記述するディラック-ヴァイル型作用素のスペクトル解析を行い、新しい知見を得た。これらの結果はまったく独創的のものであり、今後の進展がさらに期待される。

これを要するに、著者は、次数つきヒルベルト空間における自己共役作用素の理論について真に独創的な新しい知見を得たものであり、関数解析学の線形作用素論に対して貢献するところ大なるものがある。

よって著者は、北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格あるものと認める。