

DIFFERENTIAL EQUATIONS OF CLAIRAUT TYPE

(クレロー型の微分方程式)

学位論文内容の要旨

本論文では写像の特異点論の応用 (特に、ルジャンドル特異点論、開折理論、横断性定理) として、ある性質を持つ 1 階の微分方程式について研究しました。

A.C.Clairaut によって考えられた古典的なクレロー方程式は古典的完全解を持つ 1 階常微分方程式で、古典的完全解が定める直線族の包絡線が特異解であるという特徴があり、美しい相図が描けます。一般クレロー型方程式とは古典的なクレロー方程式の一般化として完全解を持つ 1 階の偏微分方程式として定義したものであり、特に正則 (方程式の変数の集合が部分多様体) となるとときにはクレロー型方程式と呼ばれています。クレロー型方程式は自然な同値関係のもとでジェネリックに分類されており、分類の 1 つのタイプに 1 つの関数族に依存して異なるものが現れる標準形 (1 つの関数モジュライ) が現れることが知られています。本論文では続く問題として時間パラメーターによってクレロー型方程式または相図がどのように分岐するかについて調べました。パラメーターに依存するクレロー型方程式 (1 パラメータークレロー型方程式) はパラメーターを止めるごとにクレロー型方程式の性質を満たすものと考え、パラメーターを止めるごとにクレロー型方程式として同値であるような同値関係を自然に考えます。この自然な同値関係はパラメーターを止めるごとに相図を保つことが分かり、この同値関係のもとで、1 パラメータークレロー型方程式をジェネリックに分類することができました。分類の中には 1 つの関数モジュライが出てくるタイプと 2 つの関数モジュライが出てくるタイプが現れることが分かります。1 つの関数モジュライが現れる例は以前の様々な特異点論の応用の研究の中で知られているのですが、2 つの関数モジュライが現れる例は具体的な特異点の分類の中で初めて現れた例であると思われます。

また特異点を許容した一般クレロー型方程式に対しても自然な同値関係のもとでジェネリックな分類をすることができ、クレロー型方程式と比べて分類の中に新たに出てくる方程式としてホイットニーの傘特異点の一般化であるホイットニーの傘型の方程式が現れることが分かりました。

さらに常微分方程式に対して一般クレロー型方程式の分岐を考えました。この場合もパラメーター付きの自然な同値関係のもとでジェネリックな分類をすることができます。結果として分類した標準形は、1 パラメータークレロー型方程式の 4 つの標準形の他にさらに 3 つの標準形が現れることが分かり、3 つの標準形のうち 2 つに対して新たな関数モジュライが出てくることが分かりました。さらに一般クレロー型方程式のジェネリックな分類には古典的なラグランジュ方程式は現れませんが、分類リストの中に古典的な 1 パラメーター付けられたラグランジュ方程式が現れることが分かりました。

これらの分類を行うには、この場合それぞれ方程式に付随するルジャンドルはめ込み芽を構成し、ルジャンドル特異点論における母関数族の理論と開折理論の応用かつ横断性定理を使うことにより、母関数族を分類することができ、対応する方程式がジェネリックに分類されます。これらの方法は個別には写像の特異点論において、標準的な方法であるといえますが、従来これらは別々の目的のために研究されてきた手法です。本論文ではそれらを統合、改良して適応

することにより、ジェネリックなクレロー型方程式の分岐の分類、一般クレロー型方程式の分類さらに常微分方程式の一般クレロー型方程式の分岐の分類を完成することが出来ました。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 泉 屋 周 一

副 査 教 授 小 野 薫

副 査 教 授 山 口 佳 三

副 査 助 教 授 石 川 剛 郎

学 位 論 文 題 名

DIFFERENTIAL EQUATIONS OF CLAIRAUT TYPE

(クレロー型の微分方程式)

本論文は写像の特異点論の応用として、ある性質を持つ1階の微分方程式についての研究報告である。A.C.Clairautによって考えられた古典的なクレロー方程式は古典的完全解を持つ1階常微分方程式で、古典的完全解が定める直線族の包絡線が特異解であるという特徴があり、美しい相図が描ける。一般クレロー型方程式とは古典的なクレロー方程式の一般化として滑らかな完全解を持つ1階の偏微分方程式として定義されたものであり、特に方程式の変数の集合が部分多様体となるときにはクレロー型方程式と呼ばれている。クレロー型方程式は自然な同値関係のもとでジェネリックに分類されており、分類表のなかの1つのタイプに1つの関数族に依存して異なる標準形(1つの関数モジュライ)が現れることがこれまでの研究では知られていた。本論文は次の問題として時間パラメーターに依存するクレロー型方程式の分岐についての研究である。パラメーターに依存するクレロー型方程式(1パラメータークレロー型方程式)はパラメーターを止めるごとにクレロー型方程式の性質を満たすものであり、パラメーターを止めるごとに方程式として同値であるような同値関係を自然に考える。この自然な同値関係のもとで、1パラメータークレロー型方程式のジェネリックな分類を与えている。分類の結果、分類表の中には1つの関数モジュライが出てくるタイプと2つの関数モジュライが出てくるタイプが現れることが判明した。1つの関数モジュライが現れる例は以前の様々な特異点論の応用の研究の中で知られていたが、2つの関数モジュライが現れる例は具体的な特異点の分類の中では初めて現れた例であると思われる。また特異点を許容した一般クレロー型方程式に対しても自然な同値関係のもとでジェネリックな分類が得られ、以前のクレロー型方程式の分類と比べて分類表の中に新たに出てくる方程式としてホイットニーの傘特異点の一般化であるホイットニーの傘型の方程式が現れることが判明した。さらに常微分方程式の場合に一般クレロー型方程式の分岐を考え、この場合もパラメーター付きの自然な同値関係のもとでのジェネリックな分類が得られた。結果として分類した標準形は、1パラメータークレロー型方程式の4つの標準形の他にさらに3つの標準形が現れることが分かり、3つの標準形のうち2つに対して新たな関数モジュライが出てくることが判明した。さらに一般クレロー型方程式のジェネリックな分類には古典的なラグランジュ方程式は現れないが、ここでの分類表の中には1パラメーター付けられた古典的に知られているラグランジュ方程式が現れることが判明した。これらの分類を行うには、この場合それぞれ方程式に付随するルジャンドルはめ込み芽を構成し、ルジャンドル特異点論における母関数族の理論と開折理論の応用かつ横断性定理を使うことにより、母関数族を分類することができ、結果として対応する方程式のジェネリックな分類を与えている。これらの方法は個別には写像の特異点論において、標準的な方法であるといえるが、従来これらは別々の目的のために研究されてきた手法であり、本論文ではそれらを統合、改良して適応することにより、ジェネリックなクレロー型方程式の分岐の分類、一般クレロー型方程式の分類さらに常微分方程式の一般クレロー型方程式の分岐の分類を完成した。これを要するに、著者は滑らかな写像の特異点論の応用としてクレロー型方程式の分類理論に関して新知見を得たものであり、微分トポロジー(特異点論)及び微分方程式論に貢献すること大なるものがある。

よって著者は、北海道大学博士(理学)の学位を授与される資格があるものと認める。