博士（理　学）　大　溪　幸　子

学 位 論 文 題 名

On the absolute Galois group of the total cyclotomic field and its unramified Galois representations

（全円分体の絶対ガロア群とその不分岐ガロア表現について）

学位論文内容の要旨

代数的整数論における興味深い問題のうちの一つに代数体 k 上の不分岐ガロア拡大の構成がある．本論文では特に基礎体 k として全円分体，つまり有理数体 $\mathbb{Q}$ の最大アーベル拡大 $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ やより一般に代数体 F の最大アーベル拡大 F^{ab} のような無限次代数体とりいくつかの結果を与える．最も興味がある $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ 上の場合に関連して，1982年に内田氏は $G_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}}$ の最大不分岐可解商が可算無限生成自由副可解群であるということを示し，朝田氏は1985年にガロア群として2次射影特殊線形群や5次以上の交代群を持つような $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ 上の不分岐非可解拡大を構成している．しかしそれ以後大きな進展は見られず，特にガロア群が非可解の場合に研究すべき問題が多く残されている．

本論文の最初の目標は $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ 上不分岐ガロア拡大を具体的に構成することである．そのために二つのアプローチを与える．一つは，第一章において，至る所半安定なアーベル多様体に付随するガロア表現を用いる．ここでは基礎体が $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ よりも大きくなったが，朝田氏が特別な楕円曲線の族を用いていたのに対し，高次元のアーベル多様体を用いてより一般的な構成を行った．それが以下の定理である．

定理 1 (本論文 Theorem 0.5). A を代数体 K 上至る所半安定なアーベル多様体とし，ある5以上の素数 p で A は悪い還元を持つとする．また $\mathcal{A}_v^0$ を K の付値 v でのネロン・モデルの特殊ファイバーの単位元を含む連結成分とする．F を K に A の p 冪等分点を全て添加した体とすると，次の $(a),(b)$ が成り立つ．

(a) A が悪い還元を持つような K の全ての付値 v に対し，上記の $\mathcal{A}_v^0$ が分裂トーラスとなるなら，$FK(\zeta_{p^\infty})^{\mathrm{ab}}$ は $K(\zeta_{p^\infty})^{\mathrm{ab}}$ 上不分岐ガロア拡大になる．ここで $K(\zeta_{p^\infty})$ は K に1の p 冪乗根を全て添加した体とする．

(b) p を割る K の全ての付値 v に対し，$\mathcal{A}_v^0$ が分裂トーラスとなるなら，$F(K\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}})^{\mathrm{ab}}$ は $(K\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}})^{\mathrm{ab}}$ 上不分岐ガロア拡大になる．

さらにここで構成された不分岐ガロア拡大のガロア群を決定したい．そこで，Ribet 氏の半安定表現の像に関する結果を，志村氏の構成法によるアーベル多様体に応用する．そして特に定理1を素数レベルの保型曲線のヤコビ多様体に応用することで次の系を得る:

系 2 (本論文 Corollary 0.6). p を5以上の素数とし，$J_0(p)$ をレベル p の保型曲線 $X_0(p)$

のヤコビ多様体とする．$\mathbb{T}$ を $X_0(p)$ のヘッケ環とし，F を $\mathbb{Q}$ に $J_0(p)$ の p 冪等分点を全て添加した体とする．もし K が p がそこで惰性するような二次体なら，$FK(\zeta_{p^\infty})^{\mathrm{ab}}$ は $K(\zeta_{p^\infty})^{\mathrm{ab}}$ 上，ガロア群として $SL_2(\mathbb{T}\otimes\mathbb{Z}_p)$ を持つような不分岐ガロア拡大になる．

以下，体 k の絶対ガロア群 を G_k と書く．二つ目のアプローチとは，$G_\mathbb{Q}$ の表現で，各素点での分解群に制限した表現の像が可換であるような表現（ここでは局所アーベル表現と呼ぶ）の変形理論を用いるものである．定理 1 の証明でも用いたが，伊原氏による補題により，そのような表現が得られれば，その核に対応する体を $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ と合成することで $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ 上の不分岐ガロア拡大が得られる．そこで第二章では特に局所アーベル表現の特別な場合である概超常表現及び超常表現を定義し，次のような結果を得る．

定理 3 (本論文 Theorem 0.7). $\mathbf{k}$ を標数 $p\geq 5$ の有限体とし，$G_{\mathbb{Q},p}$ を $\mathbb{Q}$ 上 p の外不分岐最大ガロア拡大のガロア群とする．$G_{\mathbb{Q},p}$ の連続表現

$$\bar{\rho}: G_{\mathbb{Q},p} \longrightarrow GL_2(\mathbf{k})$$

が絶対既約かつ概超常 (resp. 超常) なら，$\bar{\rho}$ の普遍概超常変形環 (resp. 普遍超常変形環) が存在して，$\bar{\rho}$ の普遍変形環からそこへの自然な全射の核は 2 元 (resp. 3 元) 生成なイデアルである．

このように変形理論を用いることで，$\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ 上の不分岐ガロア拡大が系統的に多数得られることが期待される．またこの結果は, 同伴形式を持つ保型形式に付随する剰余ガロア表現に応用することができ, 次の系を得る．

系 4 (本論文 Corollary 0.8). f を重み w, レベル 1 の正規化された $\mathbf{k}$-係数尖点固有形式とする．さらに f は同伴形式を持ち，f に付随する $G_{\mathbb{Q},p}$ の 2 次元半単純連続表現 $\bar{\rho}_f$ は絶対既約であるとする．このとき $\bar{\rho}_f$ の全ての通常変形が保型的ならば, ある冪級数 $U(T)\in\mathbb{Z}_p[\![T]\!]$ が存在して，$\bar{\rho}$ の普遍超常変形環は $\mathbb{Z}_p[\![T]\!]/(U(T))$ と同型である．

本論文では，$G_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}}$ の最大不分岐商の副有限群としての構造についても考察する．$G_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}}$ 自体に関しては，Shafarevich 氏が「それは可算無限ランクの自由副有限群であろう」と予想している．そこで第三章ではこの予想に不分岐の条件をつけた「$G_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}}$ の最大不分岐商は可算無限ランクの自由副有限群か？」という問題を考える．この問題を直接考えるのは困難なので，$\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ の代わりに $\mathbb{Q}$ の最大可解拡大 $\mathbb{Q}^{\mathrm{sol}}$ を考え，Shafarevich 予想を仮定して，$G_{\mathbb{Q}^{\mathrm{sol}}}$ の最大不分岐商（それは実際には $G_{\mathbb{Q}^{\mathrm{sol}}}$ 自身ということがわかる）が自由副有限群に近いものになることを示す．この結果は次のより一般的な副有限群の定理を示すことで得られる．

定理 5 (本論文 Theorem 0.9). F を可算無限ランク自由副有限群，$\mathcal{C}(\Delta)$ をその組成因子たちがある有限単純群のクラス Δ に属するような有限群のクラス, $R_\Delta(F)$ を F/N が $\mathcal{C}(\Delta)$ に属するような開正規部分群 N たち全ての共通部分とする．このとき $\mathcal{N}$ を非自明な $\mathcal{C}(\Delta)$-商を持たない有限群のクラスとすると，$R_\Delta(F)$ は ω-$\mathcal{N}$-自由副 $\mathcal{N}$-群である．

以上が本論文内容の要旨である．

学位論文審査の要旨

主　査　教　授　三　宅　敏　恒
副　査　助教授　前　田　芳　孝
副　査　教　授　山　下　　　博
副　査　助教授　田　口　雄一郎（九州大学大学院数理学研究院）

学　位　論　文　題　名

On the absolute Galois group of the total cyclotomic field and its unramified Galois representations

（全円分体の絶対ガロア群とその不分岐ガロア表現について）

本論文は、代数体の大きい不分岐非可解ガロア拡大の構成を主題とするものであり、大きく分けて、次の様な結果が得られている：(1) 代数体 K 上のアーベル多様体の等分点を用いた $(K^{\mathrm{ab}})^{\mathrm{ab}}$ 上の不分岐拡大の構成（一般に体 F に対し F^{ab} によりその最大アーベル拡大を表す）; (2) 局所アーベル表現の変形理論とその応用（$\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ の大きい不分岐非可解拡大の構成）; (3) 有理数体の絶対ガロア群の "非可解部分" の埋込問題可解性による特徴付け。以下、それぞれについて、より詳しく述べる。

(1) A を代数体 K 上の至る所半安定な n 次元アーベル多様体で、5 以上の素数 p 上の全ての素点で分裂乗法型還元を持つものとする。A の p 羃等分点を K に添加した体 L は K のガロア拡大でそのガロア群は $\mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Z}_p)$ に含まれるが、この拡大 L/K を $(K^{\mathrm{ab}})^{\mathrm{ab}}$ まで持上げた拡大 $L(K^{\mathrm{ab}})^{\mathrm{ab}}/(K^{\mathrm{ab}})^{\mathrm{ab}}$ は至る所不分岐である事を証明した（他の型の還元を持つ場合にも同様の結果がある）。これは 1985 年の朝田氏の結果 ($n=1$ のとき) の一部を大幅に一般化したものであり、高く評価される。さらに大渓氏は A がモジュラー曲線のヤコビアン $J_0(p)$ である場合に上の拡大 L/K を詳しく調べ（この場合の基礎体 $K=\mathbb{Q}$ である）、L は $\mathbb{Q}(\sqrt{m},\zeta_{p^\infty})^{\mathrm{ab}}$ 上不分岐になる事を示した（ここに $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ は素数 p が惰性する任意の二次体、ζ_{p^∞} は 1 の p 羃乗根）。Ribet の結果によればそのガロア群はヘッケ環の p 進完備化 $\mathbb{T}_p$ 上の 2 次特殊線型群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{T}_p)$ である。この様に、通常の岩澤理論で扱うアーベル拡大のさらにその上に、具体的に無限次非可解不分岐ガロア拡大を構成した例はあまり知られておらず、注目に値する。

(2) Mod p 楕円固有形式 f (mod p) について、それが同伴形式を持つ事と、f に伴う mod p ガロア表現 ρ_f の p での分岐が tame である事とが同値である事が、Serre により予想され Gross により証明されている。特にこの場合 ρ_f の核の体は $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ まで持上げると不分岐になり、そのガロ

ア群は弱い条件の下で $SL_2(\mathbb{F}_p)$ と同型である。そこで大溪氏はこの状況を $\mathbb{F}_p$ を剰余体とする完備局所環上に変形して、より大きい不分岐表現を得る事を考えた。この目的のため、局所アーベル表現の変形理論の一般論を展開し、特に上の ρ_f の様な 2 次元剰余表現の普遍変形環を考察した。それは適当な条件下でクルル次元が 1 以上の完備ネーター局所環になる。この結果の応用として、$\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ 上の無限次非可解不分岐ガロア拡大が得られる。この種の拡大は今まで知られておらず、「$\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ の絶対ガロア群の不分岐商は可算階数の自由副有限群であろう」という不分岐 Shafarevich 予想についての肯定的状況証拠を与える非常に貴重な例である。

(3) 上述の 不分岐 Shafarevich 予想に鑑み、大溪氏は $\mathbb{Q}$ の最大可解ガロア拡大 $\mathbb{Q}^{\mathrm{solv}}$ の絶対ガロア群 $G_{\mathbb{Q}^{\mathrm{solv}}}$ もある種の自由副有限群になるだろうと予想し、普通の Shafarevich 予想を仮定してこれを解決した、即ち $G_{\mathbb{Q}^{\mathrm{solv}}}$ は ω-自由副有限群である事を証明した。普通の意味で自由副有限ならば ω-自由副有限であるが、逆は正しくない。ω-自由副有限であるが自由副有限ではない群は恐らくこれまで知られておらず、大溪氏の研究に於いて初めて現れた。整数論のみならず、純群論的にも非常に興味深い結果である。

以上の様に、大溪氏の諸結果は極めて独創性に富む優れたものである。よって著者は北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格があるものと認める。