

学 位 論 文 題 名

On the order structure related to partial differential equations of elliptic type and parabolic type

(楕円型および放物型偏微分方程式に関する順序構造の研究)

学位論文内容の要旨

本研究は主に n 次元 Euclid 空間の中の超曲面の放物型発展方程式の定常解の解の不安定性について考察したものである。さらに、粘性解的弱解の定義を再考し、解析対象の拡大を試みている。

本論文の第一の結果は次の超曲面の発展方程式の解曲面についてのものである：

$$V = f(t, \mathbf{n}, \mathbf{A}) \quad (1)$$

ここで、 V は解曲面の法線方向への発展速度、 $\mathbf{n}$ は単位法線ベクトル、 $\mathbf{A}$ は解曲面の第二基本形式とする。このとき、この方程式についての定常解が Lyapunov の意味での安定となるかについての考察が本論文 前半部となっている。

この問題を解析するにあたり等高面手法を用いた。(1) に対応する等高面方程式は

$$u_t + F(t, \nabla u, \nabla^2 u) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \quad (2)$$

となる。すなわち、未知関数 u の時刻 t における等高面

$$\{x; u(t, x) = 0\}$$

を (1) の解曲面として取り扱う。ここで、

$$F(t, p, X) = |p|f(t, p/|p|, Q_{\bar{p}}(X)/|p|), \quad Q_{\bar{p}}(X) = (I - p \otimes p)X(I - p \otimes p), \quad \bar{p} = p/|p|.$$

本論文では、特に (1) が強放物型発展方程式を表している場合を考える。すなわち、各 $M > 0$ に対して

$$F(t, p, X + Y) - F(t, p, X) \leq -\mu \text{trace}(Q_p(Y)), \quad Y \geq 0, |X| \leq M, |p| = 1 \quad (3)$$

が成り立つ μ が存在するものとする。(1) が平均曲率流方程式の場合、上記の意味で、強放物型方程式となる。

定常解の安定性の議論を以下のように行う。超曲面 S に対し、

$$U(S, \alpha) = \{x; \text{dist}(x, S) < \alpha\}$$

とし、(1) の定常解 S の Lyapunov 安定を次のように定義する。各 $\varepsilon > 0$ に対し 適当な $\delta > 0$ を定めることで、(1) の初期曲面 Γ_0 が $\Gamma_0 \subset U(S, \delta)$ な

らば 解曲面 Γ_t は $\Gamma_t \subset U(S, \epsilon)$ をみたすとき, S を Lyapunov 安定 という. Lyapunov 安定ではないとき不安定と定義する.

次の定理を示した.

定理 1 (1) が (3) をみたすとする. このとき, 有界な閉曲面において, *Lyapunov* 安定定常解は存在しない.

以上の解析は, 放物型方程式における古典解の比較定理に基づく順序構造が鍵となる. このことは, 最大値原理・比較原理に基づいて構成される粘性解的弱解のクラスでも同様な構造があるという予想の根拠となる. この問題の定式化のため, より明確な粘性解の特徴づけが必要となる. この粘性解の再定義が本論文後半の作業となっている.

粘性解が微分方程式の解概念の拡張であると扱われる理由は概ね二つによるものと考えられる. 一つの理由は, 楕円型・放物型偏微分方程式の古典的意味での解は粘性解となることである. もう一つの理由は, 古典的意味で 2 次微分係数を持つところでは, 粘性解は古典的意味で微分方程式を満たしていることである. しかし, これらの理由は, 当然, 解概念の拡張の一意性を保証するものではない. 比較原理との関係が明確になる構造を明示し, 解概念の意味づけが必要である.

本論文では関数空間の中の二項関係を導入し, 粘性解的弱解の定義を行う. 具体的には, 擬順序関係の順序保存関数を用いて, 偏微分方程式の概念を拡張させ, 整合性をもつ弱解の概念を構成した.

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 儀 我 美 一
副 査 教 授 小 澤 徹
副 査 教 授 神 保 秀 一
副 査 助 教 授 利 根 川 吉 廣

学 位 論 文 題 名

On the order structure related to partial differential equations of elliptic type and parabolic type

(楕円型および放物型偏微分方程式に関する順序構造の研究)

曲面の運動を記述する曲率流方程式は、結晶表面のような相境界の運動の記述に重要であるばかりではなく、画像の輪郭線からノイズをとるといった工学的分野にも広く用いられている。曲率流方程式は熱方程式のような放物型の偏微分方程式の場合が多いが非線形である。このため、定常解の安定性のような基本的問題も数学的に厳密に扱うことは難しく、その解決は非線形解析学の発展の上で重要な一步になる。

本論文の前半では、曲面の成長速度がその曲面の曲がり方、つまり第2基本形式とまた曲面の単位法ベクトルにより定まり、空間的位置には無関係であるような曲率方程式を考察している。このような空間変数の平行移動に対して不変な方程式に対しては、有界で安定な定常解(動かない曲面)は存在し得ないことを示している。言い換えれば有界で安定な定常解が存在するためには、曲率流方程式が空間的に非一様な構造をもつ必要があることも主張している。この結果は3次元空間の曲面についてだけでなく、一般の n 次元ユークリッド空間内の超曲面についてのものである。従来は平均曲率流方程式についてしか示されていなかったので、扱える方程式の範囲を大幅に拡張したことになる。

本論文の後半では、曲率流方程式を始めとする放物型方程式やラプラス方程式に代表される楕円型方程式の扱いにかかせない粘性解という必ずしも微分でもない解の概念に共通する構造を研究している。2階楕円型方程式には順序保存の性質がある。これに注目して、楕円型方程式の粘性解を擬順序保存関数のある種の零点集合として表現している。このことは、粘性解を定義するには、必ずしも微分構造を必要としないことの数学的表現で独創的な研究である。

曲率流方程式の定常解の安定性については本研究以前には、定常解のまわりの線型化方程式の固有値の符号を調べることによって行われてきた。そのため、固有値をある程度評価できるような方程式、例えば平均曲率流方程式のみに対象が限られてきた。本論文では、いわゆる等高面法的な考えを用いて定常曲面(定常解)からの距離関数の満たす方程式を考察することにより、扱える方程式の対象を一般化した。これにより結晶成長の分野にあらわれやすい異方性を考慮した方程式に対しても、有界な安定な

定常曲面が存在しないことがわかり応用上の価値も高い。

本研究は、国際的にも高い評価を受けており、実際に国際的な学術雑誌 *Differential and Integral Equations* に既に出版されている。また、この研究の及ぼした影響も大きく、後年同じことのいえる方程式の範囲がさらに拡張された。現在では一方向に対する平行移動不変性で既に有界で安定な定常曲面の非存在がわかっている。

本論文の後半で展開されている粘性解と擬順序との関係についての研究は、他に全く類を見ない独創的なものである。

非線形楕円型・放物型方程式、特に楕円性や放物性が退化しているものに対しては、データがどんなに滑らかであっても解として微分不能なものを考える必要が出てくる。微分できない関数を微分方程式の解と見做すためには解の概念を拡張する必要がある。超関数理論を用いたものが従来よく用いられていたが、方程式の非線型の度合いが強いと、それではうまく解の概念が定義できない。そこで、1980年代に後にフィールズ賞受賞者となるリオンスと克蘭ダルにより方程式が2階の場合にその順序保存構造に着目した粘性解という概念が導入された。それ以降、最適制御理論、曲面の発展方程式の理論など、様々な理論に応用されてきた。

しかし、ともすると粘性解は微分方程式にしか定義できないのではないかという印象を受ける。これに対しても本論文では、粘性解を定義する上では必ずしも微分構造が必要ではなく、擬順序構造が重要であることを主張している。

例えば粘性解の理論で重要な関数自身についての単調性をもった非線形楕円型作用素は関数空間に適切な擬順序を定義すると擬順序保存の関数と見做せることを示している。逆に偏微分作用素が擬順序保存の関数であればそれは、単調かつ楕円型であることも示している。このように粘性解理論で重要な様々の概念を擬順序を用いて定式化することにより、粘性解の理論を組み立てる上での鍵は、擬順序構造であり、必ずしも微分構造は必要でないことを明らかにしていくのである。

本論文は、その独創性により既に国際学術雑誌 *Communications in Applied Analysis* に掲載されることが既に決定している。

著者は、曲率流方程式を含む楕円型放物型方程式について新知見を得ている。

よって著者は北海道大学(理学)の学位を授与される資格があるものと認める。