

学 位 論 文 題 名

Applications of Group Characters to Special Functions

(群指標の特殊関数への応用)

学位論文内容の要旨

この論文は対称群の指標の公式とそれを表現論に応用したもの, および対称群の環積達のヘッケ環の指標と超幾何型の直交多項式の関係について書かれている.

対称群の既約指標はよく知られている様に, 分割数で分類される. いま, χ_ρ^λ を分割 λ で表される対称群の既約指標の共役類 ρ での値とすると Schur 関数とは

$$s_\lambda(x) = \sum_{\rho} z_{\rho}^{-1} \chi_{\rho}^{\lambda} p_{\rho}(x)$$

で定義される対称関数である. ここで, z_{ρ} は ρ に対応する共役類の元の中心化群の位数であり, p_{ρ} は冪和対称関数である. また同様にして対称群のスピン指標に関して Schur の Q -関数が定義できる.

最初のテーマは, Littlewood の倍数公式と呼ばれる対称群の指標に関して成立つちよつと面白い公式の対称群のスピン表現への拡張についてである. 定理の主張を始めに述べよう.

Theorem 1. (Chapter 3 の THEOREM 2.3) *If r is an odd positive integer we have*

$$\zeta_{r\rho}^{\lambda} = \zeta_{\rho}^{\lambda}$$

for any $\lambda \in SP_n$ and $\rho \in OP_n$.

ここで, ζ_{ρ}^{λ} は strict な分割 λ で表される対称群のスピン指標の共役類 ρ での値である. また, $r\lambda$ とは, λ の各成分の r 倍である. この証明には J.J.C.Nimmo による Schur の Q -関数の Pfaffian 表示を利用した. 実はこの結果はこの論文中で完全に一般化される. その一般化において基本的な手法は Schur 関数の factorization と呼ばれるある分解公式である. これは本質的に D. E. Littlewood に因るものである. しかし, 彼の原証明は複雑を極めるため, 本論文ではより簡明なものを与えている. 以下にこの定理を述べよう.

Theorem 2. [Littlewood] *We assume that r is a positive integer and λ is a partition of rn .*

$$s_{\lambda}(x\omega_r) = \begin{cases} \delta_r(\lambda) s_{\lambda^0}(x^r) s_{\lambda^1}(x^r) \cdots s_{\lambda^{r-1}}(x^r) & (\lambda^{(r)} = \emptyset), \\ 0 & (\lambda^{(r)} \neq \emptyset). \end{cases}$$

この定理中の $(\lambda^0, \dots, \lambda^{r-1})$ は λ の r -quotient と呼ばれるものであり, $\lambda^{(r)}$ は r -core と呼ばれ, これらは, 分割の割り算の概念である. この公式に You に因るある準同型写像を適用することで次の定理を得る.

Theorem 3. (Chapter 3 の THEOREM 4.1) *If $\lambda \in SP_n$ has empty r -bar core, then*

$$2^{-l(\lambda)/2} Q_{\lambda}(x\omega_r) = \bar{\delta}_r(\lambda) 2^{-l(\lambda^{b(0)})/2} Q_{\lambda^{b(0)}}(x^r) T_{\lambda^{b(1)}}(x^r) \cdots T_{\lambda^{b(t)}}(x^r),$$

$$2^{l(\lambda)/2} P_{\lambda}(x\omega_r) = \bar{\delta}_r(\lambda) 2^{l(\lambda^{b(0)})/2} P_{\lambda^{b(0)}}(x^r) T_{\lambda^{b(1)}}(x^r) \cdots T_{\lambda^{b(t)}}(x^r).$$

ここに出てくる $(\lambda^{b(0)}, \dots, \lambda^{b(r-1)})$ は λ の r -bar quotient と呼ばれるものであり,

$\lambda^{bc(r)}$ は r -bar core と呼ばれ, これらは, strict な分割の割り算の概念である. あとはこの両辺を冪対称関数で展開してやることで最初の公式 (とその一般化) を得る. 実は定理の 2 と 3 は様々な応用が有ることをこの論文では示している. 始めは対称関数のプレシズムと呼ばれるものでこの公式と Cauchy の恒等式を上手く利用することで Schur 関数と冪対称関数の公式を得る. この結果は Chen-Garsia-Remmel に困って知られていたが, 私はこれを Schur の Q -関数に就いても同様の式を導き, 更に横一列の分割の場合の組合せ的な表示を得た. それは次のようなものである.

Theorem 4. (Chapter 3 の THEOREM 4.6) For a positive odd integer r , we have

$$p_r \circ Q_{(n)} = \sum_{\mu \in H_{r,n}} \bar{\delta}_r(\mu) Q_\mu.$$

Here $H_{r,n} = \{\mu = (\mu_1 \dots \mu_l) \in SP_{rn} \mid \exists i \text{ s.t. } \mu_i \equiv k \pmod{r} \Rightarrow \exists! j \text{ s.t. } \mu_j \equiv r - k \pmod{r}\}$.

また, この factorization を古典群のケースに適用した場合の公式も述べられている (THEOREM 7.1, THEOREM 8.1).

さらに, Schur 関数とアフィン Lie 環との関係が非常によく知られているが, $A_1^{(1)}$ と $A_2^{(2)}$ の場合にこの factorization を通じて maximal ウェイトの SL_2 軌道と長方形の分割に付随する Schur 関数の関係を調べた. $A_2^{(2)}$ の場合を書くとき次のようなものである.

Theorem 5. (Chapter 4 の THEOREM 3.1)

$$(1) \quad \sum_{\mu \in \mathcal{F}_1^m(\Lambda_\ell)} \bar{\delta}_3(\mu) S_{\mu^b[1]} = \varepsilon(\ell, m) p_2 \circ S_{\square(\ell-m, m)},$$

where

$$\varepsilon(\ell, m) = \begin{cases} (-1)^{\binom{m}{2}} & (0 \leq m \leq \frac{\ell}{2}) \\ (-1)^{\binom{\ell-m+1}{2} + (\ell-m)m} & (\frac{\ell}{2} \leq m \leq \ell). \end{cases}$$

この式の右辺には長方形の Schur 関数が現れており, これは非線形 Schrödinger 方程式系の解として知られている. これによって $A_2^{(2)}$ の基本表現の homogeneous と呼ばれる実現から得られる広田方程式の解析が見えてきているのである.

そして, この論文の後半部では対称群のファミリーから得られる直交多項式をテーマにしている. もともと有限群の Gelfand ペアから得られる直交多項式の研究がアソシエーションスキームやコードの研究を通じて知られていた. 私はそれを複素鏡映群の場合に適用することで, 多変数の超幾何である Aomoto-Gelfand の超幾何関数型の直交多項式が得られることを示した. 以下得られた結果を書く.

Theorem 6. (Chapter 5 の THEOREM 4.6) The zonal spherical functions of Gelfand pair $(G(r, 1, n), S_n)$ have $(r, 2r)$ -hypergeometric expressions

$$\omega_{(\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_{r-1})}^{(k_0, k_1, \dots, k_{r-1})} = F((-\ell_1, \dots, -\ell_{r-1}), (-k_1, \dots, -k_{r-1}); -n; \tilde{\Xi}_r).$$

Here $\tilde{\Xi}_r = (1 - \xi^{ij})_{1 \leq i, j \leq r-1}$ with $\xi = \exp(2\pi\sqrt{-1}/r)$.

このことは複素鏡映群の組合せ論的表現論サイドの研究をベースにしている. これを用いて表現のよい実現から不変元などを明確な形で求め, 超幾何による表示を可能にした. また, これを二面体群と対称群の環積のケースでも計算し (Chapter 5 の THEOREM 8.3), やはり Aomoto-Gelfand の超幾何関数型の直交多項式が得られることを示した.

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 吉 田 知 行

副 査 教 授 山 下 博

副 査 助 教 授 斎 藤 睦

副 査 教 授 山 田 裕 史

(岡山大学大学院自然科学研究科)

学 位 論 文 題 名

Applications of Group Characters to Special Functions

(群指標の特殊関数への応用)

本学位論文において、学位申請者の水川氏は、群指標の特殊関数への応用に関する新しい結果をいくつか得た。とくに対称群の指標公式と表現論への応用、対称群の環積などのヘッケ環の指標と超幾何型直交多項式の関係を中心的テーマとしている。以下では学位論文のうちで中心的な結果を取り上げて、それに関する審査結果を述べる。

(1) 対称群の既約指標に関する「リトルウッドの倍数公式」(第3章定理 1.1)とよばれる 50 年以上前の定理について、それを一般化した上、リトルウッドのものより簡明な証明を与えた(第3章定理 1.2)。さらに対称群の「スピン表現」の場合に同様の公式を導いた(第3章定理 2.3)。証明には、ニムモによるシューア関数のパフィアン表示を利用している。なお本学位論文の第2章には、第3章以降で使うシューア関数などの対称関数(とくにシューアの P 関数、や Q 関数)、自然数の分割、対称群の表現などに関する術語や記号、およびいくつかの重要な例がきわめて簡明にまとめられている。

(2) (1) で用いられた「シューア関数の分解公式」という手法を「シューアの Q -関数」について適用し同様の分解公式を得た(第3章定理 4.1)。このアイデアの源泉はリトルウッドにさかのぼるが、彼の煩雑で難解を極める原証明に対し、より簡明なものを与えている。この結果はチェン-ガルシア-レンメルによって知られていたが、水川氏はシューアの Q -関数についても同様の式を導き、さらに横一列への分割の場合の組み合わせ的な表示、すなわち Q -シューア関数とベキ和対称関数などとの「プレジズム(合成)」に関する公式(第3章定理 4.6)を証明した。またこの定理に述べられている分解公式を、古典群に適用して得られる公式も与えた(定

理 7.1, 8.1).

(3) 特別な無限次元リー環の表現について、その「ウエイトベクトル」とシューア関数のプレシズムとの関係を明確にした。これにより無限次元リー環の表現論における組合せ論的手法の有効性を実証した(第4章定理 3.1). 定理 3.1 の右辺に現れるシューア関数は非線形シュレーディンガー方程式系の解であることが知られており、これによって、 $A_2^{(2)}$ 型アフラインリー環の基本表現の実現から得られる広田方程式の解析が見えてくる。

(4) 複素鏡映群の「ゲルファント対」から得られる帯球関数を、青本・ゲルファントの多変数超幾何関数型直交多項式を用いて表示した(第5章定理 4.6). 多変数超幾何関数が有限群の枠組みでとらえられることを初めて明らかにした。さらに、同様の公式が二面体群と対称群の環積の場合にもあることを示した(第5章定理 8.3).

本学位論文に述べられているこれら多くの重要な結果は、すべて海外の有力な専門誌に掲載されている。現在投稿中のプレプリント類や、内外の多くの研究集会で行った講演の記録を見ても、水川氏の得た成果の重要性和今後の発展性がうかがえる。実際、プレプリントのひとつは世界最高レベルの専門誌 (Advances in Mathematics) に掲載が決まった。水川氏の学位論文は、対称群の表現や対称関数といった分野が、有限群論や組み合わせ論の範囲にとどまらず、数学の様々な分野と関連しながら進んでいることを表した点でも高く評価される。

以上の述べたような理由から、審査員一同は、本論文が北海道大学博士(理学)の学位論文にふさわしいものと認める。