博士（理　学）　澤　田　宙　広

学位論文題名

Existence and regularity of the Navier-Stokes flow with non-decaying or non-regular initial velocity

（非減衰又は非正則な初期速度に対する
ナヴィエ・ストークス流の存在と正則性について）

学位論文内容の要旨

流体の運動を表すNavier–Stokes方程式の数学的な考察は７０年前に始まり、今尚活発に研究されている。それは純粋に数学の問題としての興味からだけでなく、物理学や医学などの他の分野への応用が広範に及ぶためでもある。事実、それらからの要請もあり、現在のNavier-Stokes方程式の研究には実際の物理モデルを反映されたものが多い。

物理現象として流体の運動を観察するのに、小さい領域の中での運動を変数変換により拡大して考える事がよく行われる。そうすると、空間無限遠において解は減衰しておらず、例えば有界なものを扱う必要が出て来る。本論文の主目的の一つは、Navier–Stokes方程式の初期値問題を考え、空間無限遠で減衰していない初期速度を与えて、この問題の解を与えたり、また得られた解の性質を調べたりする事にある。

近年の研究により、この問題に対する時間局所解の存在は示されている。そこで２次元の場合についての考察を行い、以下の結果を得た：

定理１． 初期速度を有界かつ一様連続な関数とする。この時、滑らかな時間大域解が唯一つ存在する。

無限遠で減衰している問題についてはエネルギー法を用いて示される。しかし定理１の状況ではエネルギーが無限大であるから、この方法は使えない。そこで渦度の振舞いに注目し、その渦度の有界性を用いて示した。

次元が３以上については、1934年にJ.Lerayが弱解の概念を導入し、その時間大域解を構成した。この時間大域的な弱解の正則性(及び一意性)は有名な未解決問題である。1960年代にH.FujitaとT.Katoが積分方程式の概念を導入し、初期速度に滑らかさを仮定して、滑らかな時間局所解を構成した。その後80年代に、T.KatoやY.GigaとT. Miyakawaらの研究によって、非正則な初期速度に対する滑らかな局所解が構成されている。近年においては、さらに正則性を下げたときの研究が、多くの研究者によってなされている。本論文ではBesov空間 $B^s_{p,q}$ 又は斉次Besov

空間 $\dot{B}^s_{p,q}$ において、$s \leq 0$ の場合を調査し、以下の結果を得た：

定理 2. $n \geq 2, n < p \leq \infty, 1 \leq q \leq \infty, 0 \leq \varepsilon < 1 - n/p$ とする。初期速度を $B^{-\varepsilon}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ に与えた時、滑らかな時間局所解が構成できる。また $\dot{B}^{-\varepsilon}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ でも $\varepsilon = 0$ を除いて，同様に滑らかな局所解が構成できる。

$p = \infty$ の時、この関数空間は無限遠で減衰していない関数を含み、今までに解の構成が出来た空間の中で最も大きなものである。この局所解は、逐次近似法によって構成する。その際に、Besov 空間での Hölder の不等式を新たに導入した。

得られた解が正則であれば、それがさらに解析的であるかどうかが問題となる。1967 年に K.Masuda は、外力項のある Navier–Stokes 方程式の初期値境界値問題を考え、外力 f が時間と空間変数について解析的であれば、弱解が領域の内部で解析的である事を示した。その 2 年後に C.Kahane が全空間の問題に対して、外力 f が空間変数について一様に解析的であれば、弱解も空間変数について局所解析的である事を示した。そこで本論文では、全空間での滑らかな解について考察を行い、以下の結果を得た：

定理 3. 外力 f は空間変数についてある程度の解析性を満たしているとする。このとき、滑らかな解は空間変数について解析的であり、その収束半径は空間変数に一様であって更に時間とともに大きくなる。

具体的には解の導関数について、正則性 (又、時間大域解の場合には減衰) のレートを導いた。解の全ての微分まで込めて、正則性のレートが計算できたので、空間変数についての解析性のレート、即ち Taylor 展開の収束半径の評価も得た。これらのレートの評価には微分の階数に対する帰納法を用いて示される。その際には、新たに用意した Gronwall の不等式が重要な役割を果たした。

また本論文では，熱対流を表す Boussinesq 方程式についても，一般次元の滑らかな局所解の存在と，2 次元の場合の大域存在を導いている．

学位論文審査の要旨

主査　教授　儀我美一
副査　教授　小澤　徹
副査　教授　神保秀一
副査　助教授　津田谷公利

学位論文題名

Existence and regularity of the Navier-Stokes flow with non-decaying or non-regular initial velocity

(非減衰又は非正則な初期速度に対するナヴィエ・ストークス流の存在と正則性について)

流体の運動を表す Navier–Stokes 方程式の数学的な考察は７０年前に始まり、今尚活発に研究されている。それは純粋に数学の問題としての興味からだけでなく、物理学や医学などの他の分野への応用が広範に及ぶためでもある。事実、それらからの要請もあり、現在の Navier-Stokes 方程式の研究には実際の物理モデルを反映されたものが多い。

物理現象として流体の運動を観察するのに、小さい領域の中での運動を変数変換により拡大して考える事がよく行われる。そうすると、空間無限遠において解は減衰しておらず、例えば有界なものを扱う必要が出て来る。本論文の主目的の一つは、Navier–Stokes 方程式の初期値問題を考え、空間無限遠で減衰していない初期速度を与えて、この問題の解を与えたり、また得られた解の性質を調べたりする事にある。

近年の研究により、この問題に対する時間局所解の存在は示されている。そこで本論文では２次元の場合についての考察を行い、以下の結果を得た：

主結果１． 初期速度を有界かつ一様連続な関数とする。この時、滑らかな時間大域解が唯一つ存在する。

無限遠で減衰している問題についてはエネルギー法を用いて示される。しかし上の状況ではエネルギーが無限大であるから、この方法は使えない。そこで渦度の振舞いに注目し、その渦度の有界性を用いて示した。

次元が３以上については、1934 年に J.Leray が弱解の概念を導入し、その時間大域解を構成した。この時間大域的な弱解の正則性 (及び一意性) は有名な未解決問題である。1960 年代に H.Fujita と T.Kato が積分方程式の概念を導入し、初期速度に滑らかさを仮定して、滑らかな時間局所解を構成した。その後 80 年代に、T.Kato や Y.Giga と T. Miyakawa らの研究によって、非正則な初期速度に対する滑らかな局所解が構成されている。近年においては、さらに正則性を下げた場合の研究が、多くの研究者によってなされている。

本論文では Besov 空間 $B^s_{p,q}$ 又は斉次 Besov 空間 $\dot{B}^s_{p,q}$ において、$s \leq 0$ の場合を調査し、以下の結果を得た：

主結果2. $n \geq 2, n < p \leq \infty, 1 \leq q \leq \infty, 0 \leq \varepsilon < 1 - n/p$ とする。初期速度を $B^{-\varepsilon}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ に与えた時、滑らかな時間局所解が構成できる。また $\dot{B}^{-\varepsilon}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ でも $\varepsilon = 0$ を除いて，同様に滑らかな局所解が構成できる。

$p = \infty$ の時、この関数空間は無限遠で減衰していない関数を含み、今までに解の構成が出来た空間の中で最も大きなものである。この局所解は、逐次近似法によって構成する。その際に、Besov 空間での Hölder の不等式を新たに導入した。

得られた解が正則であれば、それがさらに解析的であるかどうかが問題となる。1967 年に K.Masuda は、外力項のある Navier–Stokes 方程式の初期値境界値問題を考え、外力 f が時間と空間変数について解析的であれば、弱解が領域の内部で解析的である事を示した。その 2 年後に C.Kahane が全空間の問題に対して、外力 f が空間変数について一様に解析的であれば、弱解も空間変数について局所解析的である事を示した。そこで本論文では、全空間での滑らかな解について考察を行い、以下の結果を得た：

主結果3. 外力 f は空間変数についてある程度の解析性を満たしているとする。このとき、滑らかな解は空間変数について解析的であり、その収束半径は空間変数に一様であって更に時間とともに大きくなる。

具体的には解の導関数について、正則性 (又、時間大域解の場合には減衰) のレートを導いた。解の全ての微分まで込めて、正則性のレートが計算できたので、空間変数についての解析性のレート、即ち Taylor 展開の収束半径の評価も得た。これらのレートの評価には微分の階数に対する帰納法を用いて示される。その際には、新たに用意した Gronwall の不等式が重要な役割を果たした。

また本論文では，熱対流を表す Boussinesq 方程式についても，一般次元の滑らかな局所解の存在と，２次元の場合の大域存在を導いている．
以上のように、本論文では Navier-Stokes 方程式の初期値問題の可能性に新たな知見を与え、解の滑らかさについても精密な結果を導いた。本研究は非線形偏微分方程式論に対しての重要な寄与である。よって著者は、北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格があるものと認める。