

学位論文題名

Weighted Strichartz estimates and existence
of self-similar solutions for semilinear wave equations

(重み付きストリッカーツ評価と半線形波動方程式の自己相似解の存在)

学位論文内容の要旨

本研究では第1章で波の伝播を記述するモデルである波動方程式の自己相似解, 第2章で非圧縮粘性流体の運動を記述するモデルであるナビエ・ストークス方程式の解の一意性を取り扱った.

第1章では非線形項が未知関数 u の巾乗 $|u|^p$ ($p > 1$) で与えられる非線形波動方程式の自己相似解の存在について考察した. 自己相似解とは方程式を不変に保つ時空のスケール変換で不変な解であり, その性質から非線形偏微分方程式の時間大域解の時間無限大での漸近挙動の解析に有用であることが知られている.

自己相似解はそのスケール変換に対する不変性から, 特に時刻 $t = 0$ では例えば $|x|^{-\frac{2}{p-1}}$ のような斉次関数となる. ここで p は非線形項の巾である. 逆にそのような斉次関数を初期値として一意な時間大域解を構成すればそれが自己相似解となる. このような, 斉次関数を初期値として方程式の時間大域解を構成して自己相似解を求める研究はナビエ・ストークス方程式に対し儀我-宮川により始められた. 最近では Cazenave-Weissler, Pecher 等により非線形シュレディンガー方程式, 非線形波動方程式に関しても研究が進められている.

上で述べた自己相似解を構成する方法は, 非線形項が $|u|^p$ の型の非線形偏微分方程式の初期値問題の小さな初期値に対する時間大域可解性を考察する枠組みでとらえられる. この型の方程式の初期値問題の小さな初期値に対する時間大域可解性を示すことは, 一般に非線形項の巾 p が小さいほど難しくなることが知られている. 特に, 非線形項が $|u|^p$ の型の非線形波動方程式に関しては, 空間次元 n に依存する臨界指数 $p_0(n) > 1$ が存在し, $p > p_0(n)$ のとき初期値が小さく滑らかなら時間大域解が存在し, $1 < p < p_0(n)$ のときはどんなに小さな初期値に対しても解は有限時間で爆発するということが知られている. (John, ..., Georgiev-Lindblad-Sogge.) 因に, $p_0(3) = 1 + \sqrt{2}$ である.

第1章での目的は, 非線形項が $|u|^p$ の型の非線形波動方程式に関してできるだけ小さい非線形項の巾 p に対し自己相似解の存在を示すことである. この問題に関しては, Pecher が空間3次元のとき初期値が小さな斉次関数の場合に初期値問題の時間大域可解性を考察し, 上記と類似の結果, 即ち $p > 1 + \sqrt{2}$ のとき自己相似解が存在し, $1 < p \leq 1 + \sqrt{2}$ のとき自己相似解は存在しないことを示している. 第1章における主結果は, 空間変数に関する球対称性を仮定した場合に一般の空間次元 n に対し $p > p_0(n)$ のときに自己相似解の存在を示したことである. 一般の空間次元での考察にあたっては, 空間次元が高くなるにつれて基本解の特異性が増大する点が問題となる. また, Pecher の結果から $p_0(n)$ が自己相似解の存在す

る非線形項の中の下限であることが類推される。

第1章での主結果は、考察する微分方程式と等価な積分方程式に対し、重み付き弱ルベグ空間の小さな閉球における縮小写像の原理を用いることで示される。そのためには以下で述べる2つの評価が鍵となる。

一つ目は斉次関数を初期値とする斉次線形波動方程式の解に関する評価である。この評価は解のフーリエ変換を用いた表示式を初期値の斉次性を利用して評価することで得られる。具体的には解の表示式を高周波部分と低周波部分に分割し、それぞれ振動積分の漸近展開と停留位相法による評価を利用して評価する。このとき特に高周波部分が光錐に沿った特異性の伝播に寄与し、低周波部分が空間方向の減衰に寄与することがわかる。またこの評価から斉次関数を初期値とする斉次線形波動方程式の解が自己相似解の存在が示される重み付き弱ルベグ空間に属することがわかる。

二つ目は初期値が零の非斉次線形波動方程式の解に対する重み付きストリッカーズ評価であり、積分方程式の非線形部分の評価に用いられる。ここで示した重み付きストリッカーズ評価では評価に現れる指数が‘つり合っている’ことと方程式の非斉次項の台に関する制限がない(台が光錐の内側にある場合は Georgiev-Lindblad-Sogge, Tataru による結果がある)ことで自己相似解を取り扱うことが可能となっている。この評価は空間変数に関する球対称性を利用した解の表示式を用い、最終的に重み付き Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式に帰着することで示される。

第2章ではナビエ・ストークス方程式の初期値問題の空間無限遠で減衰しない解の一意性に関して考察した。ナビエ・ストークス方程式は非圧縮粘性流体の運動を記述するモデルであり、方程式の未知関数 (u, p) はそれぞれ流体の速度場、圧力を表している。

初期値及び速度場 u が空間無限遠で減衰している場合は、圧力 p は速度場 $u = (u_1, \dots, u_n)$ とリース変換 R_j を用いて $p = \sum_{i,j=1}^n R_i R_j u_i u_j$ と表されることが知られている。

ここで考察する初期値及び速度場 u の空間無限遠での減衰を仮定しない場合の解の一意性に関しては、 $p = \sum_{i,j=1}^n R_i R_j u_i u_j$ とおくときの解 (u, p) の一意性は知られているが、速度場 u の空間無限遠での減衰がないため、一般に圧力 p が $p = \sum_{i,j=1}^n R_i R_j u_i u_j$ と表されとは限らない。実際、初期値及び速度場 u が空間無限遠で減衰しない場合、解は一意には定まらないことが知られている。そのため解を一意に定めるためには、圧力 p に関して何らかの制限が必要となる。第2章における主結果は、圧力 p が空間変数に関して有界平均振動関数の空間 BMO に属するという条件の下で解の一意性を示したことである。

関連する結果としては、Galdi-Maremonti, 岡本, Kim-Chae による圧力 p に関する空間無限遠での増大度に関する条件の下での解の一意性が知られている。

学位論文審査の要旨

主査	教授	小澤	徹
副査	教授	儀我	美一
副査	教授	神保	秀一
副査	助教授	津田谷	公利

学位論文題名

Weighted Strichartz estimates and existence of self-similar solutions for semilinear wave equations

(重み付きストリッカーツ評価と半線形波動方程式の自己相似解の存在)

非線型偏微分方程式の研究では解の存在の一般論が重要であるが、定常解、孤立波解等特別な形状をもつ解の研究も非常に大切である。特に、時空伸長に対し一定の変換則に従う方程式に対してはその変換則に不変な解、即ち自己相似解の存在が興味の対象となる。ナヴィエ・ストークス方程式に関しては儀我・宮川、非線型シュレディンガー方程式に関しては Cazenave-Weissler、非線型波動方程式に関しては Pecher の業績がそれぞれ先駆を成すものであり、それらに続く数多くの研究がある。

著者は、Pecher に始まる非線型波動方程式の自己相似解の研究を一般次元に拡張する研究を行ってきた。その結果、3次元に限られていた従来の研究を球対称性の仮定の下に一般次元に拡張する事に成功した。その際、許容される非線型性は冪では優シュトラウスかつ劣ソボレフであるので現状で考えられる最も範囲の広いものである。証明に用いたストリッカーツ型評価は、重み付きローレンツ空間の補間により導出されており、全く独自のものであり今後の応用も期待される。

これを要するに、著者は非線型波動方程式の自己相似解の存在証明において重み付きストリッカーツ評価の新知見を得たものであり、非線型偏微分方程式に対して調和解析的手法を新たに加えたという点で貢献するところ大なるものがある。

よって著者は、北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格あるものと認める。