博士（理　学）　青　井　　久

学位論文題名

Study on intermediate subalgebras between a von Neumann algebra and a Cartan subalgebra

（カルタン部分環を含む部分フォン・ノイマン環に関する研究）

学位論文内容の要旨

Hilbert 空間 H 上の有界線形作用素全体を $B(H)$ とする. $B(H)$ の $*$-部分環 M がある位相で閉じているとき, M をフォン・ノイマン環と呼ぶ. M の可換子環 (M と可換な元全体の集合) を M' と表したとき, M がフォン・ノイマン環であることは, M' の可換子環 M'' が M に等しいことに同値である. このように, フォン・ノイマン環は代数的な性質によって特徴づけることもできる作用素環として, 現在に至るまで研究が続けられている.

フォン・ノイマン環 M の中心 $M \cap M'$ が自明であるとき, M を因子環と呼び, これはフォン・ノイマン環の中でも特別な位置を占めている. 因子環の典型的な構成方法として, 次に述べる群測度構成法が良く知られている. これは, 測度空間 (X, μ) 上の可算群 G に作用を可換フォン・ノイマン環 $L^\infty(X, \mu)$ 上の作用と考えることによって, 接合積により新たなフォン・ノイマン環 $L^\infty(X, \mu) \rtimes G$ を構成する方法である. これにより豊富なフォン・ノイマン環の例を得ることができる. 実際, AFD と呼ばれる, フォン・ノイマン環の解析において中心的な役割を果して来たものは, 全てこの手法により構成することができる. このようにして得られたフォン・ノイマン環を, 測度空間の作用から解析することは古くから行われており, 多くの結果がもたらされた. 例えば, フォン・ノイマン環が因子環になることの必要十分条件は, 可算群 G の作用がエルゴード的である (自明でない不変部分集合をもたない) ことと同値である.

一方, 群測度構成法は Feldman–Moore により拡張された. 測度空間 (X, μ) 上の可算な同値関係 $\mathcal{R}$ および 2-コサイクルと呼ばれる, $\mathcal{R}$ 上の絶対値 1 に値をとる関数 ω から, $\mathcal{R}$ の各元で添字づけられた "行列" $(a_{(x,y)})_{(x,y)\in\mathcal{R}}$ を考えることにより, フォン・ノイマン環 $W^*(\mathcal{R}, \omega)$ が構成できる. このとき, "対角行列" にあたる部分フォン・ノイマン環 $W^*(X)$ は $L^\infty(X, \mu)$ と同型であり, これは $W^*(\mathcal{R}, \omega)$ の中で特別な性質をもっている. 一般に, この性質をもつ部分環はカルタン部分環と呼ばれる. 逆に, (separable な predual をもつという条件のもと) フォン・ノイマン環 M がカルタン部分環 A をもつならば, ある測度空間 (X, μ) 上の同値関係 $\mathcal{R}$ およびその上の 2-コサイクル ω が存在して, 組 $(A \subseteq M)$ は $(W^*(X) \subseteq W^*(\mathcal{R}, \omega))$ と同型になる. ゆえに, 全ての, カルタン部分環をもつフォン・ノイマン環は測度空間の側面から解析することが可能となった.

本研究は, そのような, カルタン部分環をもつフォン・ノイマン環に着目した. 具体的には, そのような組 $(A \subseteq M)$ が与えられたとき, A を含む M の部分フォン・ノイマン環 N

の構造を解析した. この研究により, 以下の2つの定理を得ることができた.

まず, 次の定理を証明した.

主定理 1 フォン・ノイマン環 M がカルタン部分環 A をもつとき, A を含む任意の M の部分フォン・ノイマン環 N について, M から N への忠実, 正則な条件付期待値が存在する. ゆえに, A は N のカルタン部分環でもある.

この定理は次のように言い換えることができる: 与えられた組 $(A \subseteq M)$ を $(W^*(X) \subseteq W^*(\mathcal{R}, \omega))$ と表したとき, $A \subseteq N \subseteq M$ となる任意の部分フォン・ノイマン環 N に対して, $\mathcal{R}$ のある部分同値関係 $\mathcal{S}$ が存在して, $N = W^*(\mathcal{S}, \omega|_{\mathcal{S}})$ となる.

この定理は既に複数の研究者によって主張されていたが, いずれもその証明は不完全なものであった. ゆえに完全な証明を独自の手法により与えた. 証明は, 部分環 N から部分同値関係 $\mathcal{S}$ を直接構成することによって行っている. 実際, 同値関係 $\mathcal{R}$ を互いに共通部分をもたない可算個のグラフ $\{\Gamma(\rho_n)\}_{n\in I}$ の和で表したとき, 部分環 N の情報から各写像 ρ_n の定義域の部分集合 E_n を得ることができる. このとき, $\{\Gamma(\rho_n|_{E_n})\}_{n\in I}$ で生成される部分同値関係が N に対応する部分同値関係になる.

この定理によって, 部分環と部分同値関係の間に, 1対1の "ガロア対応" が存在していることが判明した. これは今後の測度論の視点からのフォン・ノイマン環の解析に役立つことが期待できる.

次の結果は, Jones index が有限である因子環に関するものである.

主定理 2 因子環 M がカルタン部分環 A をもつとき, A を含む任意の M の部分因子環 N について, もし, Jones index $[M : N]$ が有限ならば, N の部分因子環 L, 有限群 G の外部的作用 α, および G の部分群 H が存在して, $(N \subseteq M) \cong (L \rtimes_\alpha H \subseteq L \rtimes_\alpha G)$ となる.

これは, 因子環–部分因子環の組 $(N \subseteq M)$ は $(W^*(\mathcal{S}, \omega|_{\mathcal{S}}) \subseteq W^*(\mathcal{R}, \omega))$ と同型であることが前定理よりわかるので, 同値関係–部分同値関係の組 $(\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R})$ を解析することによって証明を与えている. Jones index が有限という仮定から, $(\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R})$ は指数が有限であるエルゴード的な同値関係–部分同値関係となる. このような組はあるエルゴード的部分同値関係 $\mathcal{P}$ および群–部分群 $(H \subseteq G)$ によって $(\mathcal{P} \rtimes H \subseteq \mathcal{P} \rtimes G)$ と表すことができる. そこで, $\mathcal{P}$ から決まる N の部分因子環 $L := W^*(\mathcal{P}, \omega|_{\mathcal{P}})$ に着目する. 部分同値関係 $\mathcal{P}$ を解析することによって, L は M 上のある coaction δ の不動点環 M^δ に等しいことが示され, 一般論より求める結果が得られる.

この定理は, Kac 環上の作用へと応用することができ, 今後より一般の量子群の解析に対しても適用できることが期待できる.

論文中では, 以上の定理の詳細な証明およびその応用を行っている.

学位論文審査の要旨

主　査　助教授　山ノ内　毅　彦
副　査　教　授　中　路　貴　彦
副　査　教　授　林　　実樹廣
副　査　教　授　岸　本　晶　孝

学位論文題名

Study on intermediate subalgebras between a von Neumann algebra and a Cartan subalgebra

（カルタン部分環を含む部分フォン・ノイマン環に関する研究）

青井氏が研究を行っている作用素環論の中でもエルゴード理論と密接に関連した分野は, 70年代の Krieger-Connes による AFD 因子環の構造に対する決定的な仕事以来, 作用素環論では重要な研究領域として認識されており, 現在でも作用素環の豊富な具体例を提供する有効的な手段として研究されている。この手段とは, 一般に測度空間 X に (可算) 群が作用している場合, その群軌道による (ボレル) 同値関係 $\mathcal{R}$ および $\mathcal{R}$ 上の任意の 2-コサイクル ω から, $\mathcal{R}$ の各元で添字づけられた “行列” $[a(x,y)]_{x,y\in\mathcal{R}}$ を要素とするフォンノイマン環 $W^*(\mathcal{R},\omega)$ を構成する方法である。$W^*(\mathcal{R},\omega)$ において, “対角行列” からなる極大可換部分フォンノイマン環 $W^*(X)$ は際だった性質を有し, 一般にフォンノイマン環 M において極大可換部分フォンノイマン環 A がこの特別な性質をもっているとき, A は M のカルタン部分環と呼ばれる。Feldman-Moore によれば, 逆に抽象的にフォンノイマン環およびそのカルタン部分環の組 $(A\subseteq M)$ が与えられたとき, この組はある測度空間 X 上の群作用による同値関係 $\mathcal{R}$ により上述のような $(W^*(X)\subseteq W^*(\mathcal{R},\omega))$ という組として実現される。この意味でカルタン部分環をもつフォンノイマン環の研究は, 測度空間上の群作用の性質を調べることと同等であると言える。

本研究では, カルタン部分環 A をもつフォンノイマン環 M が与えられたときに, A を含む M の部分フォンノイマン環を詳細に解析し, その構造を完全に決定した。その主な結果は, 以下に述べる 2 つの定理に集約される。

まず最初の定理は, フォンノイマン環 M がカルタン部分環 A をもつとき, A を含む任意の M の部分フォンノイマン環 N にたいし, M から N への忠実, 正則な条件付き期待値が常に唯 1 つ存在する, という定理である。この定理は上で述べたような測度論的観点からは次のように言い換えることができる : 与えられた組 $(A\subseteq M)$ を測度空間上の同値関係 $\mathcal{R}$ により $(W^*(X)\subseteq W^*(\mathcal{R},\omega))$ と実現したとき, $A\subseteq N\subseteq M$ をみたす任意の部分フォンノイマン環 N にたいし, $\mathcal{R}$ の部分同値関係 $\mathcal{S}$ が存在して $N=W^*(\mathcal{S},\omega|_{\mathcal{S}})$ となる。

ここで $\mathcal{R}$ の任意の部分同値関係 $\mathcal{T}$ に対して, $W^*(\mathcal{T},\omega|_{\mathcal{T}})$ が A を含む M の部分フォン

ノイマン環になることは容易にわかるから, 上の定理は A を含む M の部分フォンノイマン環全体と $\mathcal{R}$ の部分同値関係全体との間に全単射対応が存在することを保証していることに他ならない。この対応は Dye 対応と呼ばれており, 60 年代に Dye によって M が II_1 因子環 (フォンノイマン環で中心が自明なもの) の場合に証明されて以来, 80 年代になってようやく複数の研究者により一般の M の場合にも成り立つことが証明されたかのように思われたが, いずれもその証明は不完全なものであった。本研究で青井氏は独自の手法によりその完全な証明を与えることに成功した。この結果は今後の測度論（エルゴード論）的視点からのフォンノイマン環の解析に役立つことが期待される。

2つ目の結果は, 上のような部分環 N が Jones index を有限値としてもつ場合の構造を記述するもので, 次のように述べられる：因子環 M がカルタン部分環 A をもつとき, A を含む M の任意の部分因子環 N について, もし Jones index $[M:N]$ が有限ならば, A を含む N の部分因子環 L, 有限群 G の外部的作用 α, および G の部分群 H が存在して, 与えられた組 $(N \subseteq M)$ は L の H および G による接合積から決まる組 $(L \rtimes_\alpha H \subseteq L \rtimes_\alpha G)$ として実現される。

最初の定理によれば, 上の組 $(N \subseteq M)$ は, 同値関係 $\mathcal{R}$ とその部分同値関係 $\mathcal{S}$ を用いて $(W^*(\mathcal{S}, \omega|_\mathcal{S}) \subseteq W^*(\mathcal{R}, \omega))$ と実現されるから, 主張は $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$ の解析に帰着することによって証明されている。この結果の応用として, 有限次元量子群の因子環への極小作用があったとき, その因子環と不動点環が共通のカルタン部分環を有するならば, この量子群は余可換でなければならないことを示し, Jones-Popa が 80 年前半に得た定理が量子群のレベルまで拡張できることを証明している。このことは今後より一般の量子群の解析に対しても適用できるのではないかと期待される。

以上のように青井氏の学位論文における研究課題はエルゴード理論と作用素環論の「相互作用」が十分に期待できる独創的な課題であり, 今後もこの研究領域に少なからず貢献することは間違いない。

よって著者は, 北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格あるものと認める。