博士（理　学）　大　坂　裕　夫

学 位 論 文 題 名

PSEUDO-EIGENVALUES OF W-OPERATORS ON HILBERT MODULAR FORMS

（ヒトベルトモジュラーフォーム上のW作用素の凝固有値に関する研究）

学位論文内容の要旨

F を n 次の総実代数体とし，その整数環を $\mathfrak{o}_F$ とする．F のヘッケ指標 χ の導手 $cond(\chi)$ に対し，$cond(\chi)|\mathfrak{c}$ なる F の整イデアル $\mathfrak{c}$ と n ヶの自然数の組 $k=(k_1,k_2,\dots,k_n)$ について定まるヒルベルト尖点形式の空間を $S_k(\mathfrak{c},\psi)$，また，その new form からなる部分空間を $S_k^0(\mathfrak{c},\psi)$ と表す．$\boldsymbol{f}$ を $S_k(\mathfrak{c},\psi)$ の元とすると，$\boldsymbol{f}(\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$，$(y\in F_{\boldsymbol{A}}^{\times}, x\in F_{\boldsymbol{A}})$ のフーリエ展開から F の各整イデアル $\mathfrak{n}$ についてフーリエ係数 $C(\mathfrak{n},\boldsymbol{f})\in\mathbb{C}$ が定まる．また，F の整イデアル $\mathfrak{n}$ に対して $S_k(\mathfrak{c},\psi)$ 上にはヘッケ作用素 $T'_{\mathfrak{c}}(\mathfrak{n})$ が定義され，$S_k^0(\mathfrak{c},\psi)$ は全てのヘッケ作用素について閉じている．ヒルベルト尖点形式 $\boldsymbol{f}$ が

(1) $\boldsymbol{f}\in S_k^0(\mathfrak{c},\psi)$;
(2) $(\mathfrak{n},\mathfrak{c})=1$ なる全ての $T'_{\mathfrak{c}}(\mathfrak{n})$ に対して，$\boldsymbol{f}|T'_{\mathfrak{c}}(\mathfrak{n})=\lambda(\mathfrak{n},\boldsymbol{f})\boldsymbol{f}$，$(\lambda(\mathfrak{n},\boldsymbol{f})\in\mathbb{C})$ となる；
(3) $C(\mathfrak{o}_F,\boldsymbol{f})=1$;

を満たすとき，$\boldsymbol{f}$ を原始形式であるという．このとき，$\lambda(\mathfrak{n},\boldsymbol{f})=C(\mathfrak{n},\boldsymbol{f})$ となる．

整イデアル $\mathfrak{q}$ を $\mathfrak{q}|\mathfrak{c}$，$(\mathfrak{q},\mathfrak{c}/\mathfrak{q})=1$ を満たすものとするとき，$cond(\chi)|\mathfrak{q}$ かつ，$\chi|_{(\mathfrak{o}_F/\mathfrak{q})^\times}=\psi|_{(\mathfrak{o}_F/\mathfrak{q})^\times}$ を満たすヘッケ指標 χ に対して，楕円尖点形式におけるアトキン・レーナの involution の拡張となる W 作用素 $W_{\mathfrak{q},\chi}^{(\mathfrak{c})}: S_k(\mathfrak{c},\psi)\longrightarrow S_k(\mathfrak{c},\psi\overline{\chi}^2)$ が定義される．原始形式 $\boldsymbol{f}\in S_k^0(\mathfrak{c},\psi)$ に対しては，ある原始形式 $\boldsymbol{g}\in S_k^0(\mathfrak{c},\psi\overline{\chi}^2)$ により $\boldsymbol{f}|W_{\mathfrak{q},\chi}^{(\mathfrak{c})}=A\boldsymbol{g}$，$(A\in\mathbb{C})$ が成立する．A を $\boldsymbol{f}$ に付随する $W_{\mathfrak{q},\chi}^{(\mathfrak{c})}$ の擬固有値 (psuedo-eigenvalue) という．原始形式 $\boldsymbol{g}$ は素イデアル $\mathfrak{p}$ に対するフーリエ係数 $C(\mathfrak{p},\boldsymbol{g})$ が

$$C(\mathfrak{p},\boldsymbol{g})=\begin{cases}\overline{\chi}^*(\mathfrak{p})C(\mathfrak{p},\boldsymbol{f}), & (\mathfrak{p},\mathfrak{q})=1\text{ のとき},\\ (\psi\overline{\chi})^*(\mathfrak{p})\overline{C(\mathfrak{p},\boldsymbol{f})}, & (\mathfrak{p},\mathfrak{q})\neq 1\text{ のとき},\end{cases}$$

となるものとして一意に定まる．ここで，χ^* は χ に付随する F のイデアル群上の指標であり，$\overline{\alpha}$ は α の複素共役を表す．

上に定義された擬固有値を決定することが本論文の目的である．整イデア

ル $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2$ を $\mathfrak{q}_i|\mathfrak{c}$, $(\mathfrak{q}_i, \mathfrak{c}/\mathfrak{q}_i) = 1$, $(i = 1, 2)$, $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2) = 1$ を満たすものとし，ヘッケ指標 χ_1, χ_2 を $cond(\chi_i)|\mathfrak{q}_i$ かつ，$\chi_i|_{(\mathfrak{o}_F/\mathfrak{q}_i)^\times} = \psi|_{(\mathfrak{o}_F/\mathfrak{q}_i)^\times}$, $(i = 1, 2)$ を満たすものとするとき，具体的にわかる定数 c により $W^{(\mathfrak{c})}_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2,\chi_1\chi_2} = cW^{(\mathfrak{c})}_{\mathfrak{q}_1,\chi_1} W^{(\mathfrak{c})}_{\mathfrak{q}_2,\chi_2}$ となるので，$\mathfrak{q}$ が素イデアルの冪である場合を調べればよい．

主定理　$f \in S^0_k(\mathfrak{c}, \psi)$ を原始形式，$\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{p}|\mathfrak{c}$ なる素イデアルとし，$e_0 = ord_{\mathfrak{p}}(cond(\psi))$, $e = ord_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{c})$ とおく．ヘッケ指標 χ を $cond(\chi)|\mathfrak{p}^e$ かつ，$\chi|_{(\mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}^e)^\times} = \psi|_{(\mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}^e)^\times}$ を満たすものとし，$f|W^{(\mathfrak{c})}_{\mathfrak{p}^e,\chi} = Ag$, ($g \in S^0_k(\mathfrak{c}, \psi\overline{\chi}^2)$: 原始形式, $A \in \mathbb{C}$) とする．

(1) $e = e_0$ ならば，$|C(\mathfrak{p}, f)| = N(\mathfrak{p})^{(k_0-1)/2} \neq 0$ であり，

$$A = \chi_{\mathfrak{p}}(-1)(\psi\overline{\chi})^*(\mathfrak{p}^e)N(\mathfrak{p}^e)^{(k_0-2)/2}\mathfrak{g}_{\mathfrak{p}}(\chi)C(\mathfrak{p}, f)^{-e}$$

である．ここで，$k_0 = max\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$, $\chi_{\mathfrak{p}} = \chi|_{(\mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}^e)^\times}$ であり，$\mathfrak{g}_{\mathfrak{p}}(\chi)$ は χ の $\mathfrak{p}$ に於ける局所ガウス和である．

(2) $e = 1$, $e_0 = 0$ ならば，$C(\mathfrak{p}, f)^2 = \psi^*(\mathfrak{p})N(\mathfrak{p})^{k_0-2} \neq 0$ である．更に，$\chi = id$ に対して，

$$A = -N(\mathfrak{p})^{1-k_0/2}C(\mathfrak{p}, f)$$

である．

(3) $e \geq 2$ かつ $e > e_0$ ならば，$C(\mathfrak{p}, f) = 0$ である．更に，$3e_0 \leq e$ ならば，

$$A^{2\alpha} = (\psi^\alpha)^*(\mathfrak{p}^e)$$

である．但し，α は $\psi|_{(\mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}^{e_0})^\times}$ の位数である．特に，ψ が有限位数であるならば，A は 1 の冪根である．

(1),(2) の場合は T.Miyake:Modular forms, Springer-Verlag, Corollary 4.6.18 の拡張であり，そこでの議論と同様の方法で示される．(3) は楕円モジュラー形式の場合でも新しい結果であり，twist 作用素 R_χ と W 作用素 $W^{(\mathfrak{c})}_{\mathfrak{q},\chi}$ とを組み合わせて定義される作用素 V_χ の性質を調べることにより証明される．

学位論文審査の要旨

主 査　教 授　三 宅 敏 恒
副 査　助教授　前 田 芳 孝
副 査　教 授　山 下　博

学 位 論 文 題 名

PSEUDO-EIGENVALUES OF W-OPERATORS ON HILBERT MODULAR FORMS

(ヒトベルトモジュラーフォーム上のW作用素の凝固有値に関する研究)

k, N が自然数, χ が $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times$ の指標であるとする. ヘッケの楕円モジュラー群 $\Gamma_0(N)$ 関する重さが k のモジュラー形式の空間 $S_k(N,\chi)$ に対して, 次元1定理が成り立っている. これは体を拡張し $\mathbf{Q}$ を n 次の総実の代数体としたヒルベルトモジュラー群に対しても成り立つ. このとき, レベルを割り切るような素因子 p に対してヘッケ作用素の擬固有値に対して新しい結果を得た.

F を n 次の総実代数体とし, その整数環を o_F とする. $cond(\chi)|\mathfrak{c}$ なる F の整イデアル $\mathfrak{c}$ と n ケの自然数の組 $k=(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ について定まるヒルベルト尖点形式の空間を $S_k(\mathfrak{c},\psi)$ とする. ここで $S_k^0(\mathfrak{c},\psi)$ が定義され, その基底となる原始形式 $\mathbf{f}$ が定義される.

また, 楕円尖点形式におけるアトキン・レーナの involution の拡張となる W 作用素 $W_{\mathfrak{q},\chi}^{(\mathfrak{c})}: S_k(\mathfrak{c},\psi) \longrightarrow S_k(\mathfrak{c},\psi\overline{\chi}^2)$ が楕円尖点形式の場合とまったく平行に定義される. このとき, 著者の求めた主定理は次のように述べられる.

主定理　$\mathbf{f} \in S_k^0(\mathfrak{c},\psi)$ を原始形式, $\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{p}|\mathfrak{c}$ なる素イデアルとし, $e_0 = ord_{\mathfrak{p}}(cond(\psi))$, $e = ord_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{c})$ とおく. ヘッケ指標 χ を $cond(\chi)|\mathfrak{p}^e$ かつ, $\chi|_{(o_F/\mathfrak{p}^e)^\times} = \psi|_{(o_F/\mathfrak{p}^e)^\times}$ を満たすものとし, $\mathbf{f}|W_{\mathfrak{p}^e,\chi}^{(\mathfrak{c})} = A\mathbf{g}$ とする.

(1) $e=e_0$ ならば, A が χ の局所ガウス和を用いて表される.

(2) $e=1$, $e_0=0$ ならば, $C(\mathfrak{p},\mathbf{f})^2 = \psi^*(\mathfrak{p})N(\mathfrak{p})^{k_0-2} \neq 0$ であり, $\chi = id$ ならば

$$A = -N(\mathfrak{p})^{1-k_0/2}C(\mathfrak{p},\mathbf{f})$$

である. ここで, $C(\mathfrak{p},\mathbf{f})$ は $\mathbf{f}$ の係数である.

(3) $e \geq 2$ かつ $e > e_0$ ならば，$C(\mathfrak{p}, \mathbf{f}) = 0$ である．更に，$3e_0 \leq e$ ならば，

$$A^{2\alpha} = (\psi^{\alpha})^{*}(\mathfrak{p}^{e})$$

である．但し，α は ψ の位数である．特に，ψ が有限位数であるならば，A は 1 の冪根である．

(1),(2) の場合は T.Miyake:Modular forms, Springer-Verlag，Corollary 4.6.18 の拡張であり，そこでの議論と同様の方法で示される．(3) は楕円モジュラー形式の場合でも新しい結果であり，twist 作用素 R_{χ} と W 作用素 $W_{\mathfrak{q},\chi}^{(\mathfrak{c})}$ とを組み合わせて定義される作用素 V_{χ} の性質を調べることにより証明される．さらに, 主定理の応用として著者はいくつかの重要な結果を得た.

以上により, 著者は北海道大学博士 (理学) の学位を授与されるに値する業績を示したものと認められる.