学 位 論 文 題 名

Study on the corona problem
and interpolating sequences on plane domains

(平面領域上のコロナ問題と補間点列の研究)

学位論文内容の要旨

平面領域 D 上の有界正則関数のなす Banach 環 $H^\infty(D)$ に関する補間点列の特徴付けとコロナ問題は、まず単位円板の場合に共に L. Carleson により解決されて以来、より一般の平面領域あるいはリーマン面へと研究が進められているが、なお一般の平面領域に対するコロナ問題は未解決であり、補間点列が特徴付けられている領域も多くはない。本論文の目的の一つはこれらの問題に関して、従来知られていない領域での結果を得ることである。また補間点列と有界調和関数に対する調和補間点列との関連について、単位円板のときには J. Garnett によりこれらが一致することが示され、また一致しない領域の例も知られているので、領域の形状によって一致する場合としない場合を特徴付けるのが目標となるが、これについても共に従来知られていない領域での結果を得ている。

具体的には、まず補間点列に関し、T. Gamelin の極大イデアル空間に対する局所化定理に類似の局所化定理 (Theorem 2.4) を示し、次に平面領域の普遍被覆面を考えることにより、調和補間点列に対し、Poincaré 計量を用いた一つの十分条件を与えている (Theorem 3.1)。これら 2 つの定理を用いて、補集合の各成分の直径の下限が正の平面領域に対しては Carleson の単位円板の補間点列に関する特徴付けの直接の拡張となる、Poincaré 距離の無限乗積による補間点列の特徴付けが成り立つことを示した (Theorem 3.4)。さらに Theorem 3.4 において補間点列に関連して定義される補間定数を評価するために、M. Behrens による平面領域の形式的加算和上の有界正則関数に対して Theorem 2.4 同様に局所化定理を示している (Theorem 3.2)。

補間点列の特徴付けについてはまた、極大イデアル空間の部分集合として見ることも可能で、これも単位円板に関しては、「点列を 2 分割したときの閉包が交わらない」というきれいな特徴付けが知られている。ここでも補集合の各成分の直径の下限が正の平面領域に対しては、補間点列について同じ特徴付けが成り立つことを示した (Theorem 3.7)。

補間点列と調和補間点列の関係についてもまず、補集合の各成分の直径の下限が正の平面領域に対してはこれらが一致することを示し (Theorem 4.1)、逆に一致しない場合、即ち調和補間点列であるが補間点列でないような点列が存在するための平面領域に対する十分条件を 2 つ得ている (Theorem 4.4, 4.5)。Theorem 4.4 は境界に Painlevé null set だが対数容量正

の集合が含まれること、Theorem 4.5 はある境界点が Dirichlet 問題に対する正則境界点であるがその点の上の極大イデアル空間のファイバーが峰集合でないことを用いており、共に境界がある意味で正則関数にとっては小さいが、調和関数にとっては大きいことに依存している。一方で、境界 Zalcman 領域のような十分に各境界点の大きな平面領域でも補間点列と調和補間点列の一致しない場合があることも示している (Example 4.6)。

コロナ問題に関しては、Gamelin の極大イデアル空間に対する局所化定理を平面領域の形式的加算和上の有界正則関数の場合に示し、これによりコロナ問題に関連して定義される Gamelin 定数を、コロナ問題の与えられた正則関数のデータと領域の形状により定まるデータにより評価している (Theorem 5.3)。これを Behrens の結果と組み合わせると、コロナ問題そのものに対しても新たに肯定的に解決される (コロナ定理の成り立つ) 平面領域が得られる (Example 5.5)。Behrens により平面領域のコロナ問題全体が、 Δ 領域と呼ばれる、単位円板から原点にのみ集積する閉円板列と原点を除いて得られる領域の場合に帰着されている。Behrens 自身による結果や、その Deep, Wilken による拡張によりこれらの閉円板列が互いに十分に離れているときにはコロナ定理が成り立つことが示されており、また Garnett, Jones の Denjoy 領域に対するコロナ問題の肯定的解決から、各閉円板の中心が実軸上にあるときにもコロナ定理が成り立つ。Example 5.5 はそのどちらにも含まれない、閉円板の半径の和が無限大となる場合にコロナ定理が成り立つ場合があることを示している。

最後に、リーマン面 R 上で $H^\infty(R)$ を考えるときに避けて通れない問題として、点分離、弱点分離の問題を扱っている。ここでは A を一般に R 上の正則関数のなす環とし、弱点分離のための必要十分条件を3つ与えているが、特に十分条件としての立場から出来るだけ小さな集合上の点分離から全体での弱点分離が従うことを目的とし、 R の相対コンパクトな開集合列の列 $\{D_n\}$ で、(i) ∂D_n は連結、(ii) $\bar{D}_1 \subset \bar{D}_2 \subset \bar{D}_3 \subset \dots$ 、(iii) $R = \bigcup \bar{D}_n$ 、(iv) A は ∂D_n のある近傍の点を分離する、をみたすものが存在すれば A は R を弱点分離することを示した。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 林 実樹廣
副 査 教 授 井 上 純 治
副 査 教 授 中 路 貴 彦
副 査 教 授 岸 本 晶 孝

学 位 論 文 題 名

Study on the corona problem and interpolating sequences on plane domains

(平面領域上のコロナ問題と補間点列の研究)

本論文は、複素平面領域上の有界正則関数、有界調和関数に関する補間点列を特徴付ける問題、有界正則関数環に関するコロナ問題、及び、Riemann 面上の正則関数環による点分離問題についての研究である。単位開円板領域については、有界正則関数に関する補間点列の特徴付けとコロナ問題は 1950 年代後半から 60 年代はじめにかけて、L. Carleson 等により肯定的に解決された。これらの結果を一般の平面領域について拡張することは有界正則関数の研究を進める上で興味ある問題として残っている。

著者は、コロナ問題に関しては既知の局所化定理が（有界正則関数に関する）補間点列について成り立つことを示し、調和補間点列であるための十分条件を普遍被覆面上の Poincaré 計量の無限積を用いて単位開円板の場合と類似の形で与えている。これらの結果を用いて、補集合の各連結成分の直径が小さくならない領域について、補間点列と調和補間点列が一致することを示している。（単位開円板上では補間点列と調和補間点列が一致することは J. Garnett により示されている。）また、領域の境界点で、有界調和関数に関しては正則点であるが、有界正則関数に関して‘正則点’でない（正確にはその境界点のファイバーが非峰集合となる）ものを含めば、調和補間点列であっても、補間点列とならないものが構成できることを示し、更に、すべての境界点がある有界正則関数の‘正則点’であっても補間点列と調和補間点列が一致しない領域を構成することで更なる研究の可能性を示唆している。

平面領域上のコロナ問題に関しては、局所化定理を平面領域の形式的可算和上の有界正則関数に一般化することにより、Deep, Wilken, Garnett, Jones 等によりコロナ定理が成立することが示されている領域以外にもコロナ定理が成り立つ領域を新しく構成している。

Riemann 面上の正則関数環に関しては、点分離性と弱点分離性を考察し、Riemann 面全体で弱点分離が成り立つための必要十分条件として、Riemann 面内の比較的小さな集

合上で点分離性が成り立てばよいという形の新しい条件を与えている。

以上の結果は、補間点列、コロナ問題、点分離問題の研究において新知見を得たもので、一般領域上の有界正則関数の研究の発展に貢献すること大なるものがある。

よって著者は、北海道大学博士(理学)の学位を授与される資格あるものと認める。