

学 位 論 文 題 名

# A Generalization of Chaitin's Halting Probability $\Omega$ and Halting Self-Similar Sets

(Chaitin の停止確率  $\Omega$  の一般化と自己相似停止集合)

## 学位論文内容の要旨

0, 1 からなる片側無限列の randomness を定義する試みは、1900 年代初頭の R. von Mises の研究に端を発する。そして、1960 年代から 70 年代にかけ、P. Martin-Löf、G. J. Chaitin らの研究により、それは遂に成功するに至り、その際、Kolmogorov complexity が重要な役割を果たした。0, 1 からなる有限列  $s$  の Kolmogorov complexity  $H(s)$  とは、万能アルゴリズム  $U$  が  $s$  を出力するために、 $U$  に与えなければならない最小のプログラムの長さである。このとき、片側無限列  $\alpha$  の randomness は、次の条件によって特徴付けられる。

$$\exists c \in \mathbf{R} \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad H(\alpha_n) \geq n - c$$

ここで  $\alpha_n$  は  $\alpha$  の最初の  $n$  ビットである。

本論文ではまず初めに、randomness の度合いが議論できるように、randomness の概念を一般化する。randomness の度合いは  $0 < D \leq 1$  なる実数  $D$  によって指定される。 $D$  が大きくなるにつれ、randomness の度合いは増大し、 $D = 1$  のとき、randomness の度合いの概念は、従来の randomness の概念と同じものになる。

さて、Chaitin の停止確率  $\Omega$  は、random な実数の現在までに知られているほぼ唯一の具体例であるが、本論文では  $\Omega$  を一般化した  $\Omega^D$  を導入する。 $\Omega^D$  の randomness の度合いは丁度  $D$  であり、 $\Omega^1 = \Omega$  である。また、 $\Omega$  の最初の  $n$  ビットは、 $n$  ビット以下のプログラムの停止問題を解くのに対し、 $\Omega^D$  の最初の  $n$  ビットは、 $Dn$  ビット以下のプログラムの停止問題を解く。この点においても  $\Omega^D$  は  $\Omega$  の一般化となっている。更に、 $\Omega^D$  は  $D$  の関数として  $C^\infty$  級であり、微分係数  $d^k \Omega^D / dD^k$  は  $\Omega^D$  と同じ上記の性質を持つことが示される。

以上の一般化に基づいて、本論文では次に、randomness の度合いと Hausdorff 次元との関係が調べられる。Kolmogorov complexity と Hausdorff 次元との関係は、既に B. Ya. Ryabko、L. Staiger らによって調べられている。しかしながら、これらの研究においては、実数  $x$  の normalized Kolmogorov complexity  $\lim_{n \rightarrow \infty} H(x_n)/n$  が考察された。ここで  $x_n$  は  $x$  の二進展開の最初の  $n$  ビットである。そして、Hausdorff 次元は、normalized Kolmogorov complexity に関連

付けられた。本論文で導入される randomness の度合いの概念は、normalized Kolmogorov complexity の概念よりも強い概念である。本論文では、より強い枠組みのもとで、Kolmogorov complexity と Hausdorff 次元との関係を探っていく。

$N$  次元ユークリッド空間  $\mathbf{R}^N$  の部分集合  $F$  についてのフラクタル次元として、本論文では 6 種類のアルゴリズム次元 (algorithmic dimension) が導入される。これらは全て Kolmogorov complexity を用いて定義される。6 種類のアルゴリズム次元のうち 4 つは、 $F$  の全ての点についての normalized Kolmogorov complexity の最大値（もしくは、上限値）に関係しており、実質的に B. Ya. Ryabko と L. Staiger らによって調べられたものである。他方、残りの 2 つは、 $F$  の全ての点についての randomness 度合いの最大値に関係している。本論文では、ある意味で計算可能な自己相似集合においては、6 種類のアルゴリズム次元の全てが Hausdorff 次元に一致することを示す。そのような自己相似集合の例としては、Cantor 集合、Koch 曲線、Sierpiński gasket など、お馴染みのフラクタル図形を挙げることが出来る。

自己相似集合の数学についての理論を念頭において、 $\Omega^D$  の定義式を眺めると、万能アルゴリズム  $U$  の停止集合を用いて自己相似集合を定義するアイデアに至る。この自己相似集合  $F_{\text{halt}} \subset \mathbf{R}$  の Lebesgue 測度は 0 であるが、 $\Omega^D$  の性質を用いることにより、Hausdorff 次元が 1 であることが示される。なお、 $F_{\text{halt}}$  は、情報理論的な設定において、雑音のない通信路を流れる、符号化されたメッセージの片側無限列からなる集合と見なすことも出来る。

# 学位論文審査の要旨

主 査 教 授 津 田 一 郎

副 査 教 授 辻 下 徹

副 査 助 教 授 松 本 健 司

副 査 教 授 石 川 健 三

## 学 位 論 文 題 名

# A Generalization of Chaitin's Halting Probability $\Omega$ and Halting Self-Similar Sets

(Chaitin の停止確率  $\Omega$  の一般化と自己相似停止集合)

無限列がランダムであるとはどういうことかという問題は 1960 年代半ばの Kolmogorov と Martin-Löf の研究以来さまざまな角度から研究されてきた。特に、Kolmogorov の複雑さから出発して提唱されたランダムネスの四つの概念、Chaitin のランダムネス、Chaitin の弱ランダムネス、Martin-Löf のランダムネス、Solovay のランダムネスが互いに同値である事が示された。さらに、Chaitin はその最初の  $n$  ビットが  $n$  ビット以下の長さのプログラムの停止問題を解くように構成された停止確率  $\Omega$  をランダムな無限列として定式化した。この研究は、無限列のランダムネスと Turing の意味での計算可能性との関係を示し、その理論構成の基礎をヒルベルトの第 10 問題においたことから大変注目されている。また、近年カオス力学系とフラクタル幾何学の発展のなかで、カオスのアトラクターやフラクタル集合を特徴付ける概念のひとつとしてのハウスドルフ次元とランダムネスを特徴付ける Kolmogorov の複雑さの関係が注目されるに至った。これに関してすでに二、三の先駆的な研究がなされているが必ずしも十分なものとはいえない。

本論文は、このような研究動向において、Chaitin の停止確率を一般化し  $D$ -ランダムという概念を定式化することで無限列のランダムネスに関して深い結果を得たものであり、また本質的に新しいアルゴリズム次元の定式化を通して無限列の  $D$ -ランダムネスと集合のハウスドルフ次元の関係を明らかにしたものである。本論文の主要結果は以下のようにまとめられる。

- (1) Chaitin の停止確率を、実数  $D$  を導入することで一般化し、 $D$ -ランダムネスという概念を得た。一般化された停止確率は、その二進展開の最初の  $n$  ビットが  $Dn$  ビット以下のプログラムの停止問題を解くという意味で本質的に  $Dn$  ビットの情報をもっている。この意味で、一般化停止確率は  $D$ -ランダムである無限列の具体例になっていることを示した。

- (2) 一般化停止確率の  $D$  に関する任意回数の微分もまた  $D$ -ランダムであることを示した。
- (3) アルゴリズム次元を定義しその存在条件を示した。
- (4) 実数の集合に含まれる数の二進展開が  $D$ -ランダムであるような最大の  $D$  という概念を定式化する方法を提案し、それらについての具体的な結果を示した。
- (5) 実数の集合が自己相似集合であるとき、ある条件のもとでこの集合のハウスドルフ次元が(4)の意味の最大の  $D$  と一致する、ということを示した。
- (6) そのルベーク測度が  $0$  でハウスドルフ次元が  $1$  であるような自己相似停止集合を構成した。

これを要するに、著者は、無限列の複雑さについてランダムネスの程度というエントロピーに相当する量を導入することで複雑さの分類に新しい知見を与えたものであり、複雑系数理学、応用数学、計算機科学の発展に貢献するところ大なるものがある。

よって著者は、北海道大学博士(理学)の学位を授与される資格あるものと認める。