博士（理　学）　渡　部　英　憲

学　位　論　文　題　名

Studies on Cusp Singularities of Continuous Functions on R

（実数上の連続関数のカスプ特異点に関する研究）

学位論文内容の要旨

1872年にWeierstrassがいたるところ微分不可能な連続関数を構成して以来、多くの科学者が非正則な関数を構成することを研究してきた。G. H. HardyはWeierstrass関数に対する正則性の評価を与えた。即ち、Weierstrass関数の各点Hölder指数の値を求めた。いたるところ微分不可能な連続関数の別の例としては高木関数がある。

Y. Meyerは弱スケーリング指数 $\beta(f,x_0)$ を定義して、各点Hölder指数 $H(f,x_0)$ と比較した。各点Hölder指数は自然なスケーリング指数であり、よく研究されているスケーリング指数である。ところが、$H(f,x_0)$ は擬微分作用の下で安定していない。同様に、x_0 の近傍での振動の振る舞いを十分に特徴づけていない。このことは、$f \in C^s(x_0)$ が f のウェーブレット係数の大きさの評価によって特徴づけられない、ということを意味する。$\beta(f,x_0)$ は $H(f,x_0)$ より振動により影響を受けやすい。例えば、偶数でない正の実数 s と $\gamma \geq 0$ に対して関数 f を $f(x)=|x-x_0|^s \exp\left(\frac{i}{|x-x_0|^\gamma}\right)$ としたとき、$\gamma \geq 0$ に関わりなく $H(f,x_0)=s$ であるが、$\gamma=0$ に対しては $\beta(f,x_0)=s$ で、$\gamma>0$ に対しては $\beta(f,x_0)=\infty$ である。この2つのスケーリング指数を用いて、彼は関数の2種類の特異点を定義した。このことを用いて、Bernoulli測度やBolzano関数、Riemann級数などの関数がどのような種類の特異点をもつのかということを調べた。

本論文の2節では、Weierstrass関数や高木関数、Lévy関数のスケーリシグ指数を研究する。それらの関数の各点Hölder指数がそれらの弱スケーリング指数と一致するということを示す。Lévy関数に関するスケーリング指数の部分的な結果も与える。

1995年頃、K. Daoudi達はLévy Véhelによって提出された次の問題を研究した。「s を $[0,1]$ から $[0,1]$ への関数とする。s に対するどのような条件の下で $[0,1]$ のすべての x に対して $H(f,x)=s(x)$ となるような $[0,1]$ から $\mathbf{R}$ への連続関数 f が存在するか。」

彼らは次のようにその問題を解いた。「$[0,1]$ から $[0,1]$ への関数 s に対して、$[0,1]$ のすべての x に対して $H(f,x)=s(x)$ となるような $[0,1]$ 上の連続関数 f が存在するということと、s が $[0,1]$ 上の連続関数列の下極限として表せる関数であるということとは同値である。」さらにWeierstrass型関数やSchauder基底、累次関数系を用いてそのような f を構成した。

一方、P. Anderssonは $\mathbf{R}$ から $[0,\infty]$ への関数 s に対する類似の特徴づけを証明して、直交ウェーブレットを用いて $\mathbf{R}$ のすべての x に対して $H(f,x)=s(x)$ を満たす f を構成した。

本論文の3節では、実数上の各点で与えられたカスプ特異点をもつ連続関数のさまざまな構成を研究する。即ち、実数上の与えられた関数に対して、正規直交ウェーブレットを用いて、Weierstrass型関数として、そしてスプライン関数を用いることによっての $\mathbf{R}$ の各点 x で $H(f,x)=\beta(f,x)=s(x)$ を満たす連続関数 f の構成を研究する。

学位論文審査の要旨

主　査　　教　授　　井　上　純　治
副　査　　教　授　　中　路　貴　彦
副　査　　教　授　　林　　　実樹廣
副　査　　助教授　　立　澤　一　哉

学 位 論 文 題 名

Studies on Cusp Singularities of Continuous Functions on R

（実数上の連続関数のカスプ特異点に関する研究）

１９世紀末ワイエルストラスはいたるところ微分不可能な連続関数（いわゆる'ワイエルストラス関数'）を構成して学界を驚かせた。その後同様な幾つかの不規則関数が構成されたが、長い間これらの関数は極めて病的な例外として理解され、遇されて来た。しかし近年カオス力学系やフラクタル幾何学の発展の中で、微分不可能な不規則関数は物理学、信号解析、数学など多くの分野から重要な興味深い対象として注目を集めるに至っている。

1985 年頃、Y. Meyer は連続関数の各点での特異性に関する広範な研究を行い、その中で弱スケーリング指数という新しい指数を導入した。この指数は、これまでの標準的な指数である各点ヘルダー指数と異なり、微分演算に対するふるまいが自然で、かつ信号解析における「チャープ」という激しい振動性を検出することが可能なものである。Meyer はこの新しい指数を用いて、連続関数の各点での特異性をカスプ型と振動型とに分類した。

また、同じ頃 Meyer を含む研究グループは「連続関数の各点ヘルダー指数となりうるのはどんな関数か」という問題を提起した。この問は連続関数が（ある意味で）複雑になりうる限界を問う興味深いものであるが、P.Andersson, 1997, Y.Meyer 他 1998 らによって、「連続関数列の下極限」として特徴ずけられることが示されている。

以上の状況のもとに、本学位論文の内容は次のように纏められる。

(1) ワイエルストラス関数及び高木関数はすべての点でカスプ型の特異点をもつことを証明した。

(2) レヴィ関数のノンダイアディック点はヘルダー指数が１であればカスプ型の特異点であることを証明した。これよりノンダイアディック有理点がカスプ特異点であるという結果が従う。

(3) 実数直線上で連続関数列の下極限として表される関数 s が与えられたとき、s を各点ヘルダー指数として持ち、かつ各点がカスプ型特異点になるような連続関数を２通りの方法—正規直交ウエーブレットを用いる方法及びワイエルストラス型の級数を用いる方法—で与えた。しかも、

(4) 実数直線上の連続関数 s の各点での値がその点での s のヘルダー指数より真に小さいなら、s を各点ヘルダー指数として持つ連続関数を、ワイエルストラス関数や高木関数の定義の拡張となる形で構成出来ることを示した。

以上の結果のうち、(1), (2) はいくつかの重要な関数の特異性に関して新しい知見を得たものである。(3) のワイエルストラス型級数に関する結果は、Meyer 達の論文では関数の値域が 1 より小という条件のもとでしか出来ていなかったものを、完全に一般化した条件のもとに拡張したものである。また、(4) はワイエルストラス関数や高木関数の示す特異性をより一般的見地から見直すことを可能にする結果である。

以上により、本論文は実軸上の連続関数の特異性の理論に寄与するところ大であり、申請者は学位（理学）を授与される資格があるものと認めた。