

学 位 論 文 題 名

Some remarks on totally geodesic foliations
of Lorentzian manifolds

(ローレンツ多様体上の全測地的葉層についてのいくつかの見解)

学位論文内容の要旨

閉リーマン多様体上の全測地的葉層については、様々な人によって研究されてきた。例えば、Blumenthal と Hebda により、余次元 1 全測地的葉層が存在する閉リーマン多様体の普遍被覆は、葉の普遍被覆と $\mathbb{R}$ との積に微分同相であることが示されている。また、Ghys により、閉リーマン多様体上の余次元 1 全測地的葉層は位相的には分類されている。よって、閉リーマン多様体上の余次元 1 全測地的葉層についてはほとんど重要なことは示されていると言っても良い。

一方、閉ローレンツ多様体上の全測地的葉層についてはあまり研究はなされていないように思える。Zeghib は次のような余次元 1 葉層構造に対してはローレンツ計量を与えて光的な全測地的葉層に出来ることを示した：

- (i) 1 次元正規部分群をもつようなリー群による locally free action で軌道が余次元 1 であるものから定まる余次元 1 葉層構造；
- (ii) リーマン多様体 (M, g) 上の余次元 1 葉層構造 L を、 L と L に制限した g を保つ M の微分同相で suspend してえられた葉層構造。

また、Carrière と Rozoy は光的完備な 2 次元トーラス上の標準的な光的な全測地的葉層は C^0 線形化可能であることを示した。これらの結果は光的な全測地的葉層に関してであるので、一般に全測地的葉層について考えてみた。本論文は閉ローレンツ多様体上の全測地的葉層について得られた結果をまとめたものである。以下、本論文の主な内容を述べる。

まず、擬リーマン多様体上に与えられた葉層構造が全測地的であるかどうか判定する必要十分条件を得た。この必要十分条件はリーマン多様体でよく知られていた式である。

次に、簡単に示せる一般論を考えた。以下のような結果を得た。

- (1) ローレンツ多様体上の余次元 k 全測地的葉層構造に対して、空間的、時間的、光的な葉全体の和集合をそれぞれ S 、 T 、 L とおくと、 S と T は開集合、 L は閉集合である。
- (2) すべての葉が稠密であるような余次元 1 全測地的葉層は、すべての葉が空間

的であるか、すべての葉が時間的であるか、すべての葉が光的であるかのどれかである。

三番目に、基本的な問題として次を考えた：

問題 完備な閉ローレンツ多様体上の余次元 1 全測地的葉層で空間的、時間的、光的な葉のうち 2 種類以上をもつものが存在するか？

この問題に関係する以下のような結果を得た。

(3) 光的完備なローレンツ 2 次元トーラス上の余次元 1 全測地的葉層で空間的、時間的、光的な葉のうち 2 種類以上をもつようなものは存在しないことを示した。

(4) 光的完備でないローレンツ 2 次元トーラス上の余次元 1 全測地的葉層で空間的、時間的、光的な葉のうち 2 種類以上をもつような例を構成した。

(5) 完備なローレンツ 3 次元トーラス上の余次元 2 全測地的葉層で 3 種類の葉を含む例を構成した。

命題 (3) の系として以下を得た。

(6) 光的完備なローレンツ 2 次元トーラス上の全測地的葉層で Reeb component をもつようなものは存在しないことを示した。

(7) ローレンツ多様体 M が 2 次元トーラスに微分同相であるような時間的全測地的部分多様体 N をもち、さらに N の上に空間的、時間的、光的な葉のうち 2 種類以上の葉をもつような全測地的葉層が存在するならば、 M は光的完備ではないことを示した。

(8) 光的完備な 2 次元トーラス上の非特異な Killing ベクトル場は空間的、時間的、光的なベクトル場のうちのどれかであることを示した。

四番目に、リーマン計量の意味で余次元 1 全測地的葉層をもちえないような閉多様体上にローレンツ計量の意味での余次元 1 全測地的葉層が存在するかということ考えた。基本群が有限群であるような閉多様体はリーマン計量の意味での余次元 1 全測地的葉層をもたないが、ほとんどがそのような多様体の典型的な例である種数 1 の Heegaard 分解をもつ 3 次元多様体上でローレンツ計量の意味での余次元 1 全測地的葉層を構成する問題を考え、次をえた。

(9) 種数 1 の Heegaard 分解をもつような 3 次元閉多様体上にローレンツ計量の意味での余次元 1 全測地的葉層が存在する。

最後に、様々な問題を与えた。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 西 森 敏 之
副 査 教 授 山 口 佳 三
副 査 教 授 泉 屋 周 一
副 査 助 教 授 石 川 剛 郎

学 位 論 文 題 名

Some remarks on totally geodesic foliations of Lorentzian manifolds

(ローレンツ多様体上の全測地的葉層についてのいくつかの見解)

閉リーマン多様体上の全測地的葉層については、様々な人によって研究されてきた。例えば、Blumenthal と Hebda により、余次元 1 全測地的葉層が存在する閉リーマン多様体の普遍被覆は、葉の普遍被覆と R との積に微分同相であることが示されている。また、Ghys により、閉リーマン多様体上の余次元 1 全測地的葉層は位相的には分類されている。よって、閉リーマン多様体上の余次元 1 全測地的葉層についてはほとんど重要なことは示されていると言ってもよい。

一方、閉ローレンツ多様体上の全測地的葉層についてはあまり研究はなされていないようである。Zeghib は次のような余次元 1 葉層構造に対してはローレンツ計量を与えて光的な全測地的葉層に出来ることを示した：

- (i) 1 次元正規部分群をもつようなリー群による局所自由作用で軌道が余次元 1 であるものから定まる余次元 1 葉層構造；
- (ii) リーマン多様体 (M, g) 上の余次元 1 葉層構造 L を、 L と L に制限した g を保つ M の微分同相で懸垂してえられた葉層構造。

また、Carriere と Rozoy は光的完備な 2 次元トーラス上の標準的な光的な全測地的葉層は C^0 線形化可能であることを示した。これらの今までに知られている結果は光的な全測地的葉層に関してであるので、一般に全測地的葉層について研究してみた。本論文は閉ローレンツ多様体上の全測地的葉層について得られた結果をまとめたものである。

以下、本論文の主な内容を述べる。

まず、擬リーマン多様体上に与えられた葉層構造が全測地的であるかどうか判定する必要十分条件を得た。この必要十分条件はリーマン多様体でよく知られていた式のアナロジーである。

次に、基礎になる一般論を考えて、以下のような結果を得た。

(1) ローレンツ多様体上の余次元 k 全測地的葉層構造に対して、空間的、時間的、光的な葉全体の和集合をそれぞれ S 、 T 、 L とおくと、 S と T は開集合、 L は閉集合である。

(2) すべての葉が稠密であるような余次元 1 全測地的葉層は、すべての葉が空間的であるか、すべての葉が時間的であるか、すべての葉が光的であるかのどれかである。

三番目に、基本的な問題として次を考えた：

問題 完備なローレンツ多様体上の余次元 1 全測地的葉層で空間的、時間的、光的な葉のうち 2 種類以上をもつものが存在するか？

この問題に関係する以下のような結果を得た。

(3) 光的完備なローレンツ 2 次元トーラス上の余次元 1 全測地的葉層で空間的、時間的、光的な葉のうち 2 種類以上をもつようなものは存在しないことを示した。

(4) 光的完備でないローレンツ 2 次元トーラス上の余次元 1 全測地的葉層で空間的、時間的、光的な葉のうち 2 種類以上をもつような例を構成した。

(5) 完備なローレンツ 3 次元トーラス上の余次元 2 全測地的葉層で 3 種類の葉を含む例を構成した。

命題 (3) の系として以下を得た。

(6) 光的完備なローレンツ 2 次元トーラス上の全測地的葉層で Reeb 成分をもつようなものは存在しないことを示した。

(7) ローレンツ多様体 M が 2 次元トーラスに微分同相であるような時間的全測地的部分多様体 N をもち、さらに N の上に空間的、時間的、光的な葉のうち 2 種類以上の葉をもつような全測地的葉層が存在するならば、 M は光的完備ではないことを示した。

(8) 光的完備な 2 次元トーラス上の非特異な Killing ベクトル場は空間的、時間的、光的なベクトル場のうちのどれかであることを示した。

四番目に、リーマン計量の意味で余次元 1 全測地的葉層をもちえないような閉多様体上にローレンツ計量の意味での余次元 1 全測地的葉層が存在するかということを考えた。基本群が有限群であるような閉多様体はリーマン計量の意味での余次元 1 全測地的葉層をもたないが、ほとんどがそのような多様体の典型的な例である種数 1 の Heegaard 分解をもつ 3 次元多様体上でローレンツ計量の意味での余次元 1 全測地的葉層を構成する問題を考え、次をえた。

(9) 種数 1 の Heegaard 分解をもつような 3 次元閉多様体上にローレンツ計量の意味での余次元 1 全測地的葉層が存在する。

これを要するに、著者はローレンツ多様体上の全測地的葉層についていくつかの定理を証明し新知見を得たものであり、葉層構造論に対して貢献するところ大なるものがある。

よって著者は、北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格あるものと認める。