

学 位 論 文 題 名

The Cauchy problem for nonlinear Klein-Gordon and Dirac equations

(非線型のクライン・ゴールドン方程式とディラック方程式の初期値問題)

学位論文内容の要旨

本論文は非線型クライン・ゴールドン方程式 (NLKG)、非線型ディラック方程式 (NLD) およびそれらを合わせたディラック・クライン・ゴールドン方程式 (DKG) の初期値問題についての研究を扱う。

第一の考察は $(1+n)$ 次元の時空における NLKG の非相対論的極限問題についてである。非線型シュレディンガー方程式 (NLS) の解を NLKG の解の非相対論的極限とみなした時、二つの解の収束性からみた関連について議論する。どのような位相で解同士の収束を示すことができるのか、またどのような特徴を観察することができるのかを考察する。この問題に関して既知の結果として次のものがある。以下 $\mathbb{R}^n$ 上の関数空間として s 階のソボレフ空間を H^s 、 r 乗可積分関数の成すルベグ空間を L^r で表す。1984 年に堤正義氏は初期値の H^2 収束を仮定し、時間局所一様 L^2 空間で解の収束を与えた。1990 年に B. Najman 氏は初期値の H^1 有界と L^2 収束を仮定し、時間局所一様 L^r , $2 < r < 2n/(n-2)$ 空間で解の収束を示した。今回次の結果が得られた。

● NLKG、NLS の初期値を H^1 で有界とする。初期値同士の収束を L^2 、および H^1 で仮定する。このとき解同士がそれぞれ時間局所一様 L^2 空間および時間局所一様 H^1 空間で収束する。

またこのときに NLKG の解の最大存在時間を NLS の最大存在時間で下から押えこの極限移行のときに NLKG の存在時間が“つぶれない”ことを示している。さらに L^2 収束に関してはその最適オーダーも与えている。

第二の考察は $(1+3)$ 次元の時空における NLD の初期値問題である。NLD は関数が $\mathbb{C}^4$ に値をもつ方程式のシステムであるがそれを時間で微分することにより NLKG を導くことができる。より正確には微分した項を非線型項に含む NLKG となる。まず初めに NLD の解の存在に関する研究をした。今回の形の NLD に対し 1997 年に M. Escobedo 氏と L. Vega 氏が $s > 1$ の H^s での時間局所解を与えている。今回小さな初期値に対する時間大域解の存在を与えた。

● $s > 1$ に対し H^s で十分小さい初期値に関して、NLD には H^s に連続な値をもつ時間大域一意解が存在する。

証明にクライン・ゴルドン方程式(ディラック方程式)に対するストリッカーズ評価の指数の末端点での成立を示し、利用している。これは1970年代後半より R. Strichartz 氏、P. Brenner 氏、J. Ginibre 氏、G. Velo 氏、H. Pecher 氏らにより研究されてきた波動関数の滑らかさと可積分性を時空大域的に扱えるストリッカーズ評価の改良である。

次に非相対論的極限の問題である。ここでは局所時間での扱いとなる。NLD の解が NLS の解に収束する様子を扱う。この問題に関し既知の結果として次のものがある。1991 年に B. Najman 氏は初期値の H^2 有界と H^1 収束を仮定し、時間局所一様 H^1 空間で解の収束を与えた。1995 年に松山登喜夫氏は初期値の H^2 収束を仮定し、時間局所一様弱 H^1 空間で解の収束を与えた。次の結果を得た。

● $s > 1$ とする。NLD、NLS の初期値を H^s で与える。初期値同士の収束を H^s で仮定する。このとき解同士が時間局所一様 H^s 空間で収束する。

またこのときも NLD の最大存在時間は NLS のものにより下から押えられている。

第三の考察では $(1+3)$ 次元の時空における DKG の小さな初期値に対する時間大域解を扱う。尺度不変性の議論により得られる臨界正則度とほぼ等しい正則度の関数空間で時間大域解を与えた。

● μ_0, ν_0 を臨界正則度とし $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ は十分小さい正数とする。このとき、 $H^{\mu_0+\varepsilon_1} \times H^{\nu_0-\varepsilon_2}$ 内の十分小さな初期値に関し、DKG には $H^{\mu_0+\varepsilon_1} \times H^{\nu_0-\varepsilon_2}$ に連続な値をもつ時間大域一意解が存在する。

DKG の考察では NLKG と NLD を統一的に扱う必要がある。このときにストリッカーズ評価が重要な役割を果たす。

学位論文審査の要旨

主 査	教 授	小 澤	徹
副 査	教 授	中 村	玄
副 査	教 授	儀 我	美 一
副 査	助教授	津田谷	公 利

学 位 論 文 題 名

The Cauchy problem for nonlinear Klein-Gordon and Dirac equations

(非線型のクライン・ゴールドン方程式とディラック方程式の初期値問題)

非線型クライン・ゴールドン方程式は場の理論の中でも最も良く取上げられる模型でありその古典場の数学的実現に就いては40年以上の歴史を有する。一方非線型シュレディンガー方程式は場の方程式であると共に様々な物理現象の記述にも用いられ数学的にもソリトン理論から調和解析的取扱い迄幅広い分野での研究対象である。非線型波動方程式の函数空間論的研究によれば両者を或る程度一般的に論じる事が出来1960年以来 Segal, Jörgens, Morawetz, Strauss, Strichartz, Brenner, Pecher, Ginibre, Velo, Kato をはじめとする数多くの研究者による膨大な文献を有するに至っている。一方非線型シュレディンガー方程式を非線型クライン・ゴールドン方程式の非相対論的極限と見做す方法は形式的には易しいが数学的取扱いは特異極限の枠組で捉えられ付随する線型偏微分作用素の型もコワレフスキ型から非コワレフスキ型に転換する為大変困難な問題として知られていた。この試みに初めて成果を挙げたのは堤正義早稲田大学教授で1984年のことであったが空間次元、非線型項の条件、データの収束条件、解の収束を計る函数空間等に様々な制限を課さねばならなかった。その後この問題には幾つかの成果が現れたものの本質的な解決を見る事無く残されていた。

本論文は、この様な研究動向に於いて、クライン・ゴールドン方程式に対するストリッカーズ型評価を低周波・高周波に分離して記述する事により、非相対論的極限の問題を現在考え得る最も理想的な形で解決したものであり、そこで培った様々な技巧を発展・応用させ、関連する諸問題を研究したものである。本論文の主要結果は以下の様に纏められる。

(1) 非線型クライン・ゴールドン方程式の非相対論的極限が非線型シュレディンガー方程式である事を、一般の空間次元で劣臨界ソボレフ指数を持つ非線型項に対し、 L^2 及び H^1

に於いて証明した。ここで L^2 は自乗可積分函数の成すヒルベルト空間、 H^1 は有限ディリクレ積分を持つ L^2 函数の成すヒルベルト空間である。 L^2 は全電荷、 H^1 は全エネルギーの空間と見做せる。

(2) 非線型ディラック方程式の非相対論的極限がベクトル値非線型シュレディンガー方程式である事を 劣臨界指数のソボレフ空間で証明した。時間大域解の存在に就いての未解決問題に対しても 同様の枠組で解決を図った。

(3) ディラックとクライン・ゴルドンの非線型方程式系の初期値問題を 劣臨界指数のソボレフ空間で大域的に解いた。

これを要するに、著者はストリッカーズ型評価に対して 周波数分解と謂う新たな方法論を導入し、この分野の新しい展開を見出したものであり、非線型偏微分方程式、調和解析学の発展に貢献するところ大なるものがある。

よって著者は、北海道大学博士(理学)の学位を授与される資格あるものと認める。