

学 位 論 文 題 名

On boundedness of an infinite product function
on a Zalcman domain

(Zalcman 領域におけるある無限積関数の有界性について)

学位論文内容の要旨

本論文では、複素平面上のある種の無限連結領域上で有界な正則関数を構成することを目的としている。この結果は2葉被覆面の点分離の問題 (Myrberg 現象) の研究に応用される。考える領域はつぎのようなものである。 Δ_0 を穴あき単位円板とし、その中に数列 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $1 > c_n \searrow 0$ なるようにとる。 Δ_n を中心 c_n 半径 r_n の互いに交わらない閉円板とし、領域 $D(c_n, r_n) := \Delta_0 \setminus \cup \Delta_n$ を考えると、これは無限連結領域になっている。この領域を Zalcman 領域と呼ぶ。

与えられた $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$ をみたせば無限積 $p(z) = \prod_{n=1}^{\infty} z/(z - c_n)$ は収束して、 Δ_0 上の有理型関数を定める。ここで半径 r_n をどのようにとれば p が $D(c_n, r_n)$ 上有界になるかという問題に対し、次の結果を得た。

定理 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ が条件 $\limsup_{n \rightarrow \infty} c_{n+1}/c_n < 1$ をみたすとき、 $p \in H^{\infty}(D(c_n, r_n))$ となるための必要十分条件は $\sup_{n \in \mathbb{N}} c_n^n / (c_1 \cdots c_{n-1} r_n) < \infty$ 。

$\{c_n\}, \{r_n\}$ に対し $c_n = 2^{-\nu_n}$, $r_n = 2^{-\nu_n N(n)}$ で定まる数列 $\{\nu_n\}, \{N(n)\}$ を用いて上の必要十分条件を書き換えると $\sup_{n \in \mathbb{N}} \nu_n (N(n) - \nu_n^*) < \infty$ となる。ここで、 $\nu_n^* = n - (\nu_1 + \cdots + \nu_{n-1})/\nu_n$ 。与えられた中心列 $\{c_n\}$ に対し $p \in H^{\infty}(D(c_n, r_n))$ であるためには、小閉円板の半径 r_n をどれだけ小さく、言い換えれば $N(n)$ をどれだけ大きくできるかという視点で考えたとき、この必要十分条件は $N(n) \leq \nu_n^* + O(1/\nu_n)$ と書けるので、 $N(n) = \nu_n^*$ のときが概ね $N(n)$ の最大を与える。そこで ν_n^* の挙動を調べることで、次のことがわかった。(1) $N(n)$ は常に $N(n) \nearrow \infty$ なるようにとれる。(2) ある中心列 $\{c_n\}$ に対しては $N(n)$ は n に限りなく近くとれる。(3) またある中心列に対しては $N(n)$ は“ゆっくり”としか増加できない。

$(\tilde{\Delta}_0, \Delta_0, \pi)$ を限界のない2葉被覆面で $\{\pi^{-1}(c_n)\}_{n=1}^{\infty}$ を分岐点にもつものとする。 $\tilde{D} = \pi^{-1}(D) \subset \tilde{\Delta}_0$ とおくと、 $(\tilde{D}, D, \pi)$ は限界のない分岐点をもたない2葉被覆面になる。 $H^{\infty}(\tilde{D}) = H^{\infty}(D) \circ \pi$ が成立するとき $(\tilde{D}, D, \pi)$ について Myrberg 現象が起こるという。上記の結果を用いると、Myrberg 現象について Hayashi と Nakai により得られた $c_n = 2^{-n}$ の場合の結果を $\limsup_{n \rightarrow \infty} c_{n+1}/c_n < 1$ なる場合に拡張することができる。

定理 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\limsup_{n \rightarrow \infty} c_{n+1}/c_n < 1$ をみたすとする。

- (1) $\sup_{n \in \mathbb{N}} c_n^n / (c_1 \cdots c_{n-1} r_n) < \infty$ ならば $(\tilde{D}, D, \pi)$ について Myrberg 現象は起こらない。
- (2) $H^{\infty}(D)$ に対し $z = 0$ で一致の定理が成り立つならば $N(n) \rightarrow \infty$ 。

ここで $H^{\infty}(D)$ に対し $z = 0$ で一致の定理が成り立つとは、次の性質をもつ $f \in H^{\infty}(D)$ は $f \equiv 0$ に限るときのことをいう； $\lim_{z \rightarrow 0, z \neq 0} f^{(m)}(z) = 0$ ($m = 0, 1, 2, \dots$)。関数 p は導関数については $\lim_{z \rightarrow 0, z \neq 0} p^{(m)}(z) = 0$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) が成り立つので p が D 上有界ならば一致に定理が成り立たないことがわかる。

以上の結果は $\{c_n\}$ が条件 $\limsup_{n \rightarrow \infty} c_{n+1}/c_n < 1$ をみたす場合のものである。この条件をみたさない場合として、中心列 $c_n = n^{-\alpha}$ ($1 < \alpha \leq 2$) を考える。このとき、半径 r_n をどのようにとっても p は Zalcman 領域 $D(c_n, r_n)$ 上有界にならないことを証明した。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 林 実樹廣
副 査 教 授 井 上 純 治
副 査 教 授 中 路 貴 彦
副 査 教 授 岸 本 晶 孝

学 位 論 文 題 名

On boundedness of an infinite product function on a Zalcman domain

(Zalcman 領域におけるある無限積関数の有界性について)

Zalcman 領域は単位開円板から原点に収束する互いに交わらない小閉円板列を取り除いて得られる領域で、無連結領域の最も単純な例として 1960 年代の L. Zalcman の研究以来、様々な観点から研究されてきた。

本論文では、小円板列の中心が正の実軸上にある場合に、この中心列に極をもち原点に零点をもつ 1 次分数関数の無限積で表される関数が Zalcman 領域上で有界となるための条件を、小円板列の半径を小円板の中心列で定量的に評価することで与えている。

この無限積関数に興味があるのは、この関数の平方根が Zalcman 領域上の 2 葉被覆 Riemann 面上の正則関数を与え、無限積関数が有界であれば、この Riemann 面上の有界正則関数に関する点分離問題が肯定的に解決されるためである。また、この無限積関数は原点における実軸の負方向からのすべての高階微分係数が零になっており、一致の定理との関連性からも興味がある。

有界性の条件は中心列が等比級数より早く原点に収束している場合に、必要十分条件の形で与えられている。これは中心列が等比級数の場合の既知の結果を一般化しているだけでなく、中心列が不規則に並んでいる場合を含んでいる。実際、中心列の分布の不規則性が小円板列の半径の大きさに与える影響を考察している。これは、中心列が 2 葉被覆 Riemann 面上では分岐点に対応していることから、Riemann 面の幾何構造が点分離問題に影響していると解釈できる点で興味深い。

更に、中心列が $1/n^p$ ($1 < p \leq 2$) で与えられる場合には閉小円板列を互いに交わらない限り、どのようにとってもこの無限積関数は考えている Zalcman 領域で有界にならないことを示している。

以上の結果は、Zalcman 領域上の一致の定理、2 葉被覆面上の点分離問題の研究において新知見を得たもので、有界正則関数の研究の発展に貢献すること大なるものがある。

よって著者は、北海道大学博士 (理学) の学位を授与される資格あるものと認める。