博士（理　学）　木　藤　理　恵

学位論文題名

Hilbert schemes and cyclic quotient surface singularities

（ヒルベルトスキームと２次元巡回商特異点）

学位論文内容の要旨

$G \subset GL(2,\mathbf{C})$ を位数 n の有限巡回部分群で鏡映を含まないものとすると、G は $\mathbf{C}^2$ に自然に作用する。このとき、$\mathbf{C}^2$ の長さ n の零次元 G 不変部分スキームからなるスキーム $\mathrm{Hilb}^G(\mathbf{C}^2)$ を考える。当論文ではこのヒルベルトスキーム $\mathrm{Hilb}^G(\mathbf{C}^2)$ の構造を記述し、更にこれが２次元巡回商特異点 $\mathbf{C}^2/G$ の最小特異点解消になっていることをみる。また、その中の既約例外曲線が、ある特別な性質をもつ既約表現と対応していることを調べる。

以下、もう少し詳しく述べることにする。Grothendieck によって定義されたヒルベルトスキームに、$\mathbf{C}^2$ の零次元部分スキームで長さが n のものからなるスキーム $\mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$ がある (§1)。これは $\mathbf{C}^2$ の相異なる n 点からなる集合を開集合として含んでいるので、Hilbert-Chow morphism と呼ばれる $\mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$ から $\mathbf{C}^2$ の n-th symmetric product $S^n(\mathbf{C}^2)$ への自然な写像が存在する。G が $\mathbf{C}^2$ に作用するとき、この２つにも G は自然に作用し、G の固定点集合の間の写像

$$\pi : \mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2) \to (S^n(\mathbf{C}^2))^G \cong \mathbf{C}^2/G$$

$$Z \mapsto \sum_{p\in\mathbf{C}^2} (\dim O_{Z,p}) \cdot p$$

が得られる。§2 でみるように、$\mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$ は非特異で π は双有理になるので、この写像は商特異点 $\mathbf{C}^2/G$ の解消を与えている。

G が $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ の部分群の時には、$\mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$ には holomorphic かつ symplectic な構造がはいるので dualizing sheaf が自明なものであることが分かり、この特異点解消の最小性が示せる（伊藤、中村)。そうでない場合にはこの議論は使えない。(ただし、最近石井亮氏によって reflexive module を用いた最小性の証明が任意の G に対してなされた。）しかし G が巡回群のときには Hirzeburch-Jung の連分数展開（§3) を用いて、トーリック多様体として最小特異点解消 S が構成出来る (§4)。そこで我々は $\mathrm{Hilb}^G(\mathbf{C}^2)$ の元の定義イデアルがどのような形をしているかを全て決定し (§5)、これとヒルベルトスキームの universality を用いて S から $\mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$ への写像が存在することを示した。$\mathrm{Hilb}^G(\mathbf{C}^2)$ は $\mathbf{C}^2/G$ の特異点解消であり、また S は最

小であるので、これにより $\mathrm{Hilb}^G((\mathbf{C}^2) \cong S$ が証明される (§6)。

$SL(2,\mathbf{C})$ の部分群 G に対しては、最小特異点解消の既約例外曲線と群 G の非自明な既約表現との 1 対 1 対応 (McKay 対応) が知られている。伊藤、中村は 1996 年に $\mathrm{Hilb}^G(\mathbf{C}^2)$ の例外曲線上の点からある G 加群を構成し、その G 加群の既約分解に対応する既約表現を調べ、それが McKay 対応を与えていることを示した (§7)。一般に、G が $\mathrm{GL}(2,\mathbf{C})$ の有限部分群のときには、既約例外曲線は全ての非自明既約表現とは対応しないのであるが、Wunram はある特別な性質をもつ既約表現との全単射が存在することを１９８８年に証明した。我々は伊藤、中村の構成した G 加群が $G \subset \mathrm{GL}(2,\mathbf{C})$ の場合には Wunram の 1 対 1 対応を与えていることを有限巡回群に対して示した (§8)。

学位論文審査の要旨

主　査　教　授　中　村　　郁
副　査　教　授　諏　訪　立　雄
副　査　教　授　吉　田　知　行
副　査　助教授　島　田　伊知朗

学位論文題名

Hilbert schemes and cyclic quotient surface singularities

（ヒルベルトスキームと2次元巡回商特異点）

木藤理恵氏の提出した博士論文は、ある種の有限群に付随したヒルベルト概型の構造を完全に決定したもので、すでに論文は北海道大学杞要に掲載が決定しております。

McKay対応という数学的にきわめて興味深い現象があります。これは、ある種の商空間の特異点の極小特異点解消の幾何学が群の表現論によって詳しく解明できるという原理であります。一般に、商空間は不変式によって構造が決まります。したがって極小特異点解消は、もとの商空間から2次変換の組み合わせによって構成されますから、不変式の組み合わせで極小特異点解消の構造を把握できると考えるのが、常識的な見方でありますが、McKayが20年前に指摘した事実は、極小特異点解消は群の表現論によってより精密に記述されるということでした。それ以来この問題はおおくの数学者の関心を集めさまざまに研究されてきました。

木藤氏は群が可換でふたつのパラメーターをもつ場合に研究しました。このとき商空間は群の軌道のヒルベルト概型を考えることにより、一斉に特異点を解消することができます。木藤理恵氏はこのヒルベルト概型を詳細に研究し、それが極小特異点解消を与えることを証明し、さらに表現論的な構造を完全に明らかにしました。このような詳細な研究は例がすくなく、氏の研究は高度な貴重な例を提供するものとして、すでに国内国外の研究者の関心を集めております。

木藤氏の研究は、McKay対応の幾何学の研究について重要な場合に詳細な記述を与えたという点で、大きな貢献をなすものであります。

よって北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格あるものと認めます。