

学位論文題名

常微分方程式の切り換えによって生ずる
フラクタル集合と閉包に関する研究

学位論文内容の要旨

非線形動力学は、時間的に発展する系(力学系: Dynamical Systems)の振るまいを研究する学問分野である。とくに、系の非線形性に由来する解のカオティックな挙動や分岐現象の分類・特徴付けを通じて、現実の様々な複雑な現象を統一的に理解するための体系を作り出すことを目指している。このような性格を持つ非線形動力学は、数学・物理学・化学・生物学・電気機械工学・経済学など多くの異なる分野の問題と関わる学際的な学問領域であるといえる。非線形動力学が密接に関わる分野の一つである神経回路網理論では、脳をニューロンのネットワークとしてモデル化し、その機能をニューロン間の相互作用として理解する。この分野における主要な関心の一つは、ネットワークが内部の可変パラメータを調節することによって外部環境に適応する方式を解析することである。このようなネットワークの振るまいを理解するためには、外部環境とそれに対する適応という視点を取り入れた非線形動力学を発展させる必要がある。このような問題意識に基づいて提案されたモデルが、「切り換え入力を受ける力学系」である。ここで、切り換え入力とは、有限の時間区間で定義される複数の時間パターンの非周期的な列であり、脳に対する外部環境のモデルとしては、従来の非線形動力学の枠組みにおいて解析されてきた一定値入力や周期入力といった規則的な入力に比べ、より一般的なものであると考えられる。このような切り換え入力を受ける力学系の振るまいは、反復関数の集合によって記述できる。これまでの研究では、反復関数が距離の縮小性を満たす場合には、系の状態がフラクタルな不変集合上を遷移することが理論的に示されている。

本研究では、切り換え入力を受ける常微分方程式の解の挙動を非線形動力学系の観点から解析し、以下の結果を得た。まず第一に、反復関数が距離の縮小性を満たさない場合の系の振るまいを調べるために、反復関数の縮小性を解析的に議論できる線形力学系を解析した。そして、反復関数に対する縮小条件がない場合でもフラクタル遷移が観測されることを明らかにした。第二に、フラクタル集合を包み込む「閉包」を、内挿システム・ベクトル場の重ね合わせという概念を導入することで定義し、この閉包を時変入力を受ける線形力学系および一定値入力を受ける非線形力学系の例としてダuffing振動子および強制減衰振り子に対して具体的に構成した。第三に、フラクタル遷移現象を示す物理系のエネルギーが持つ諸特性を、直列LCR回路を例として

数値実験により解析し、系のエネルギー分布が離散的なバンド構造を持ち、解軌道がそれらの上を遷移していることを示した。

本論文は全8章から構成されている。

第1章では、本研究の背景および目的を述べる。

第2章では、切り換え入力を受ける力学系を記述する枠組みとして、超円筒状態空間とその上で定義されるベクトル場の集合を導入する。これにより、系の振るまいを、ベクトル場の切り換えが生成する円筒空間上の軌道集合によって理解できることを示す。この円筒空間上の連続時間のダイナミクスは、ポアンカレ断面上の反復関数の集合による離散時間のダイナミクスに抽象化できることを示し、反復関数の縮小条件の下では、系の状態がフラクタルな不変集合上を遷移することを理論的に論じる。さらに、ポアンカレ断面上のフラクタル集合を包み込む「閉包」を、内挿システム・ベクトル場の重ね合わせという概念を導入することで定義する。

第3章では、 n 次元線形力学系の反復関数および2次元系のリプシッツ定数を解析的に計算し、特定のパラメータの下では反復関数が非縮小写像となることを示す。そして、非縮小的な反復関数を持つ系を用いた数値実験を行い、このような系においてもフラクタル遷移現象が観測されることを示す。

第4章では、3章で議論した2次元線形力学系を例として、ポアンカレ断面上のフラクタル集合の閉包を具体的に構成する。2次元線形系における閉包は、その系の行列の固有値が実数であるときは、反復関数のポイントアトラクタを通る軌道によって、また固有値が複素数のときは接点を通る軌道によって構成されることを明らかにする。さらに、円筒状態空間中の軌道集合を包み込むチューブ構造を示す。

第5章では、非線形力学系のフラクタル集合に対する閉包を、入力が一定値の場合に限定して論じる。非線形系に対する閉包を実験的に構成する方法を、切り換え多様体を導入することによって提示する。そして、この方法を用いてダuffing振動子および強制減衰振り子に対する閉包を具体的に示す。また、この章の後半では、フラクタル集合の閉包が極限閉軌道とみなせることを示す。

第6章では、二つの安定状態を持つダuffing振動子の閉包が入力の振幅を分岐パラメータとして分岐することを、数値実験により示す。

第7章では、切り換え入力を受ける直列LCR回路のエネルギーが持つ諸特性を数値実験により解析する。そして、系のエネルギー分布がバンド状の構造をしており状態がその上を遷移していること、このバンド構造がさらに微細なバンドからなっていることを示す。

第8章では、本研究で得られた結果について述べ、それらの結果に対する考察を行う。

学位論文審査の要旨

主査	教授	前	晋爾
副査	教授	堤	耀広
副査	教授	石	政勉
副査	助教授	郷	原一寿

学位論文題名

常微分方程式の切り換えによって生ずる

フラクタル集合と閉包に関する研究

天体の運動に関する三体問題を解決するため、19世紀後半にポアンカレが創始した非線形動力学は、20世紀に入って理論的に体系化された。さらにコンピュータの発達によってカオスなどの非線形動力学現象の視覚化が可能になり、一般に広く知られるようになった。その発展は数学、物理学、生物学、医学、経済学、情報工学など幅広い異なる学問分野に影響を与えている。非線形動力学の主な研究対象は状態量の時間発展を明らかにすることにあるが、これまでは、外界と相互作用しない、閉じたシステムに対する状態量を問題にしてきた。しかし、現実の研究対象は、外界と相互作用する、開いたシステムを問題とすることが多い。近年、開いたシステムは力学系集合として取り扱うことが重要であり、システムの時間発展はフラクタル集合上のダイナミクスとして捉えられることが明らかとなってきた。このことは、外部入力によって切り換えられる常微分方程式の解軌道がフラクタルとして特徴付けられることを意味する。

本論文ではこれらを背景にして、常微分方程式の確率的切り換えによって生ずるフラクタル集合とその閉包について、非線形動力学的観点から理論的および数値解析的に研究を行い、開いたシステムに対する新たな知見を得た。主な研究結果は、以下の3点である。まず、常微分方程式の切り換えによって生ずる解集合のフラクタル構造が、縮小条件に限らず存在することを示した。次に、フラクタルな解集合を閉じ込める閉包が存在することを明らかにした。そして、ハミルトニアン力学系の場合には、エネルギーがバンド構造を持ち、外部との相互作用時間に対して振動的な依存性を持つことを示した。

本論文は全8章から構成されている。

第1章では、本研究の背景および目的を述べる。

第2章では、常微分方程式の確率的切り換えに対する一般的な理論的体系をまとめ、解集合のフラクタル性について述べる。次に、内挿力学系、ベクトル場の重ね合わせを導入し、解集合に対してそれを閉じ込める閉包が存在することを示した。

第3章では、解析的な取り扱いが可能な線形力学系のリプシッツ定数を求めることにより、反復関数が縮小写像でない場合にも、解集合がフラクタルを特徴つける特別な方程式を満たすことを明らかにした。また、 n 次元線形力学系の反復関数を一般的に導出した。

第4章では、線形力学系を固有値によって3種類に分類し、それぞれの場合についてフラクタル集合の閉包が存在することを具体的に示した。

第5章では、非線形力学系のフラクタル集合の閉包について述べる。一定値の切り換え入力の場合には、ダuffing振動子および強制減衰振り子を例にして、非線形力学系でも閉包が存在することを示した。さらに、リターンマップによって閉包が力学系のリミットサイクルアトラクタであることを示した。また、 n 次元非線形力学系においても、ベクトル場の平行条件によって切り換え多様体が定義でき、それをポアンカレ断面とすることで、閉包がリミットサイクルアトラクタであることを指摘した。

第6章では、ダuffing振動子を用いて、閉包がパラメータに対して分岐を起こすことを数値解析的に示した。

第7章では、直列LCR回路を用いて、エネルギーについて考察した。電源電圧を外部入力として確率的に切り替えることで、状態空間にフラクタル集合および閉包が存在することを示した。次に、ポアンカレ断面上のエネルギー分布を求め、それがフラクタルのクラスタ構造を反映したバンド構造であることを明らかにした。さらに、ポアンカレ断面上で定義された平均エネルギーが入力の切り換え時間間隔に対して振動的な依存性をもつことを明らかにした。

第8章では、本研究の総括を行った。

これを要するに、著者は非線形動力学の観点から常微分方程式の確率的切り換えによって生ずるフラクタル集合と閉包に関して理論的および数値的考察を行い、開いたシステムに対する基本的特徴の一端を明らかにしたものである。この知見は、非線形、非平衡、開放系を対象とする複雑系の解明に貢献するとともに、非線形動力学、応用物理学の発展に寄与するところ大なるものがある。

よって著者は、北海道大学博士（工学）の学位を授与される資格あるものと認める。