

非線形変換の極限図形の特徴及び分類に関する研究

学位論文内容の要旨

非線形変換過程は多くの工学的問題や現象に現れる。数値解析における近似では基本的に線形近似を用いるが、一次の項が厳密に存在しない問題においては、二次以上の項が支配項となり高次の近似が用いられる。特に、二次変換過程は二つの個体から一つの個体が生成される過程、すなわち生物系の生殖過程あるいは二次化学反応系などにも見られる。また画像圧縮法の一手法であるフラクタル画像圧縮の復号処理においても、画像の非線形変換過程が取り扱われている。極限図形は、不動点及び周期点、概周期点の吸引域の境界の点の集合である。

以上に述べた点変換系、すなわち一般的には n 次元空間からそれ自身への写像の反復過程には、物理的意味は異なるものの幾何学的対象を共通とする工学的問題として、自励系の力学系がある。点変換系において得られる様々な判別式は、自励系の力学系においても別の物理的意味をもつ判別式になっており、その逆も成り立っている。

1980 年代以降、Mandelbrot が 1 次元複素二次変換に対するフラクタル図形の複雑さを図示し解析したことに始まるフラクタルの研究が大いに進展した。それより遡ること一世紀近く前に、有理変換に対する Julia の研究があり、その中で取り上げられた Julia 集合と呼ばれる極限図形の研究が、最近のフラクタル追究において取り上げられている。

本論文では、実空間上の同次変換に対して、与えられた変換式から極限図形の性質を分類する手法を開発し、自己相似形状、特に入れ子構造の有無に基づく分類を行う。自己相似性の存在は、一部の情報から全体の構造の予測を可能とし、また逆に全体の構造から微小領域の構造を明らかにする。この性質は例えば時系列データの予測や画像データの圧縮、また拡大画像のデータ補間に対して用いられるなど、新しい応用が開発されつつある。

第 1 章では、序論として本研究の背景と目的について述べる。

第 2 章では、本論文で取り扱う基本的な概念についての定義を行う。実同次変換及びその極限図形、さらに変換過程における点の挙動がもつ性質を論ずる。特に不動方向の存在や局所安定性など既知の成果もここに取り上げる。

第 3 章では、極限図形の特徴として 2 次元実同次二次変換に対する自己相似形状を取り上げる。そしてその中の入れ子構造の有無に基づく分類を行う。この結果に基づいて、実際に極限図形を描くことなく、任意に与えられた変換式に対して分類が可能となり、またその手続きは、変換式の係数を用いた有理演算を行うだけで可能で

ある。自己相似形状の性質は時系列解析や画像解析などの分野に応用されている。

第4章では, Cima and Llibre(1990) が策定した2次元実同次三次微分方程式系で表される自励系力学系の標準形に対して, 点変換系の表現の立場からその標準形を吟味した結果, 分類の完全性が成立していないことを発見し, これを訂正する。さらに任意の変換を標準形に変換することなく, 無限不動方向の有無を判別することを可能にする。この結果, 不変式を用いて分類を行う方法であることから, 任意に与えられた変換式に対して無理演算を行うことなく, 有理演算を行うだけで判別することが可能となった。

第5章では, 非同次変換のうち同次変換と同様に極限図形を扱うことのできる例を示す。一般に非同次変換と同次変換とは全く異なる極限図形形状を示す。すなわち, 同次変換の場合一つ方向に対し境界は一点しか現れないのに対し, 非同次変換では無数に現れ得る。しかしながら, 特定の条件下においては非同次変換でも同次変換と同様に, 極限図形を解析できる場合があり, この性質を扱う。

第6章では, 結論として, 本論文で得られた結果について考察し, 今後の研究の課題を示す。

学位論文審査の要旨

主査	教授	伊達	惇
副査	教授	宮腰	政明
副査	教授	新保	勝
副査	助教授	野中	秀俊

学位論文題名

非線形変換の極限図形の特徴及び分類に関する研究

非線形変換過程は様々な工学的問題や現象に現れており、通常は線形変換で近似することが可能である。数値解析における近似もその一例であり、可能な限り線形近似を用いるが、一次の項が厳密に存在しない問題においては二次以上の項が支配項となるために、二次以上の近似が必要となる。また、生物系の生殖過程あるいは二次化学反応系などに見られる変換過程、すなわち、二つの個体から一つの個体が生成される過程は二次変換過程である。また画像圧縮法の一手法であるフラクタル画像圧縮の復号処理においても、部分画像の局所アフィン変換に基づく非線型変換過程が活用されている。

非線形変換過程における不動点、周期点及び概周期点の吸引域の境界の点の集合等の性質は、19世紀以降追究されてきているが、コンピュータの無い時代にはそれらの複雑な形状を視覚的にとらえることはできなかった。1970年代にコンピュータ周辺機器としてXYプロッターが出現し、続いてコンピュータグラフィックスが可能となってそれらの形状を近似的に表示できるようになり、極限図形としての性質の研究が急速に進展する。1980年、Mandelbrotが1次元複素二次変換に対するフラクタル図形の複雑さを図示して、フラクタルの研究が注目されるに至った。それより遡ること一世紀近く、有理変換に対するJuliaの研究があり、その成果としてのJulia集合と呼ぶ極限図形が一連のフラクタル研究において取り上げられている。

以上に述べた点変換系、すなわち一般的には n 次元アフィン空間からそれ自身への写像の反復過程と共通の幾何学的構造を有し、しかも物理的意味が異なる工学的対象として、自励系の力学系がある。物理的には全く異なる両者の間には、一方（点変換系）において様々な性質を示す不変式が、他方（自励系の力学系）においても別の物理的意味をもつ不変式になっているという関係が存在する。

本論文は、実空間上の同次変換に対して、与えられた変換式から極限図形の性質を分類する手法を開発し、さらに自己相似形状、特に入れ子構造の有無に基づく分類手法を開発したものである。自己相似性の存在は、一部の情報から全体の構造の予測を行なうことを

可能とし、また逆に全体の構造から微小領域の構造を明らかにする。この性質は例えば時系列データの予測や画像データの圧縮、また拡大画像のデータ補間に対して用いられるなど、新しい応用が開発されつつある。

本論文の成果は以下のように要約される。

第1章では、序論として本研究の背景と目的について述べている。

第2章では、本論文で取り扱う基本的な概念についての定義を行い、それらの性質を論じている。実同次変換及びその極限図形、さらに変換過程における点の挙動がもつ性質を論じている。特に不動方向の存在や局所安定性など既知の成果もここに取り上げられている。

第3章では、極限図形の特徴として2次元実同次二次変換に対する自己相似形状を取り上げ、その中の入れ子構造の有無に基づき、変換の分類を行う手法を提案している。この結果、実際に極限図形を描くことなく、任意に与えられた変換式に対して分類が可能となり、またその手続きに要する計算の手間は、変換式の係数に対する有理演算の範囲に抑えられた。自己相似形状の存在を効率的に判別する手法を開発したことにより、自己相似形状を利用している時系列解析や画像解析などの分野における、処理の効率化が期待される。

第4章では、Cima and Llibre(1990)が策定した2次元実同次三次微分方程式系で表される自励系力学系の標準形に対して、点変換系の表現の立場からその標準形を吟味した結果、分類の完全性が成立していないことを発見し、これを訂正している。さらに任意の変換を標準形に変換することなく、無限不動方向の有無を判別することを可能にする不変式を導出している。この結果、前章と同様に、任意に与えられた変換式に対して、無理演算を含まず、有理演算だけによる判別の効率化が実現した。

第5章では、非同次変換のうち同次変換と同様に極限図形を扱うことのできる例が示されている。非同次変換と同次変換とでは極限図形形状は異なるものであるが、その主たる理由は、同次変換の場合一つ方向に対し発散収束の境界は一点しか現れないのに対し、非同次変換では無数に現れ得るからである。しかしながら、特定の条件下においては非同次変換でも一つ方向に対して発散収束の境界が一点しか存在しない場合があり、同次変換と同様に、極限図形の近似的表示が可能となる。その具体例を本人が発見しこの性質を本章で扱っている。

第6章では、結論として本研究の成果を総括し、また今後の研究の課題を示している。

以上のように、本論文は非線形変換における極限図形の性質を扱う手法及び自己相似性の有無に基づく分類の手法を提案し、工学への応用の上で有益な知見を得ており、情報工学の発展に対して貢献するところ大である。

よって著者は、北海道大学博士(工学)の学位を授与される資格があるものと認める。