

学 位 論 文 題 名

Monte Carlo study of two-dimensional quantum gravity
coupled to weighted percolation cluster models(重みつきパーコレーションクラスターモデルに結合した
2次元量子重力のモンテカルロシミュレーションによる研究)

学位論文内容の要旨

4次元時空における量子重力の定式化は、基礎物理学に残された難問のひとつである。我々はおもに場の理論の立場から、まず2次元および3次元の量子重力を理解する方向でこの問題に取り組んできた。特に2次元では、Liouville理論と行列模型による厳密な解析が可能であり、さらに数値シミュレーションを利用した大規模な解析によって、中心電荷が1以下の共形場が結合した2次元重力について多くのことがわかってきた。特に量子化された時空のフラクタル的性質は最も興味ある対象であり、この性質は量子重力に特有の極めて普遍的な特徴であることがわかってきた。

量子重力のフラクタル性を調べるには、時空の2点関数を一般座標変換不変な形式に構成してそれを解析するのが、今のところ最も有効な方法である。特に物質場が結合していない純粋な2次元量子重力の場合には、転送行列の方法で時空の2点関数を厳密に解析でき、その結果、物質場が結合していない2次元時空のフラクタル次元は4であることがわかった。一方、物質場として共形場が結合した2次元重力に対しては、転送行列の方法で解析するのは非常に困難であり今のところできていない。ところが、時空の測地的距離の定義を変更することによって厳密な解析が可能となり、この場合、中心電荷が c の共形場が結合した2次元重力における時空のフラクタル次元 $d_H^{(1)}$ は c の関数として理論的に予言できる。時空のフラクタル次元はまた別の方法でも予言されている。それはLiouville理論における拡散方程式を解析する方法であり、この場合もある仮定のもとで理論的な予言 $d_H^{(2)}$ があたえられている。物質場が結合していない重力の場合、すなわち $c=0$ のときは、どちらの予言値も $d_H=4$ となり、厳密な結果と一致する。しかしそれ以外の c の値に対しては大きく異なり、どちらの予言が正しいかは今のところわからない。いずれにしても、ある仮定のもとでの理論値であり、全く独立な別の方法で解析する必要がある。

そこで本研究では、様々な c の値で数値シミュレーションを実行し、理論値のチェックを行った。もちろんこのようなシミュレーションをする場合、数値計算特有の問題がつきまとうのだが、数値シミュレーションの利点のひとつは、どのような仮定も置く必要がないところにある。

他の研究グループによる、これまでになされた数値シミュレーションは、おもに $0 < c < 1$ のユニタリー共形場が結合した2次元重力の系である。その結果は、この領域において c の値に関係なく $d_H \approx 4$ である。またこれは、どの研究グループもほぼ同じ結果であった。この領域に関する限りでは、どちらの理論値もシミュレーションの結果と一致していると言

えない。

我々はここで、力学的単体分割と呼ばれる方法を使う。これは2次元の多様体を重力場の1つの配位とみなし、この2次元面を三角形分割して系の自由度を有限にし、コンピュータで数値的に解析する方法である。このようなアプローチを採ると2次元重力の量子化の問題は、三角形分割された様々な形状の2次元面をアンサンブルとする系の統計力学の問題に置き換えることができ、この系の臨界現象を解析することによって、場の理論としての2次元量子重力の性質を調べることができる。

我々はまず $c = -2$ のスカラーフェルミオンモデルが2次元重力に結合した系でシミュレーションを行った。このモデルはある程度解析的に解くことができるため、それを利用してモンテカルロ法を使わずに独立な配位を直接作り出すことが可能である。これはシミュレーションの高速化につながり、それによって、過去のシミュレーションに比べるとはるかに多くの独立な配位と大きなサイズの格子でシミュレーションができる（いずれも 10^6 のオーダー）。フラクタル次元を得るために我々が測定した物理量は、時空の2点関数である。その際、有限サイズスケールリングが有効に働く。これらのテクニックを駆使して、我々は $d_H = 3.58 \pm 0.04$ の結果を得た。この様な高い精度の結果は、これまでのシミュレーションでは得られなかった。またこの結果は、理論値 $d_H^{(2)}(c = -2) = 3.561$ とよく一致している。一方、このとき $d_H^{(1)}(c = -2) = 2$ である。

我々はさらに $-2 < c < 0$ の領域を詳しく調べるために、重みつきパーコレーションクラスターモデルが2次元重力に結合した系でシミュレーションを行った。このモデルは Q -state ポッツモデルを dichromatic polynomial で表現したものであり、ここで Q は形式的に任意の正の実数としてよい。このとき c と Q には対応関係があり、 $0 \leq Q \leq 4$ の範囲で Q を変化させると c は -2 から 1 まで動く。我々はこの範囲で12個のモデルについて調べた。まずはじめに、物質場に関する臨界結合定数を決めなければならない。これをするために我々は、普通のパーコレーション理論におけるパーコレーション転移のオーダーパラメーターを使い、有限サイズスケールリングを利用して決めた。次にベイビーユニバースの分布の解析から、string susceptibility γ_s を測定した。この量は2次元面の形状を特徴づけるものであり、また時空のフラクタル性を反映した量である。この結果は KPZ の公式とよく一致しており、このことは先に決めた臨界結合定数が十分に正確であることを意味している。我々は以上の準備のもとで、時空のフラクタル次元を測定した。方法はスカラーフェルミオンモデルと同様に、時空の2点関数を解析して求める。その際、格子のサイズが十分には大きくないので、有限サイズスケールリングを様々な形で利用した。3通りの独立な方法でフラクタル次元を決めたが、いずれも互いに同様な結果が得られた。特に、 $-2 \leq c \leq 0$ の領域では理論値 $d_H^{(2)}$ とよく一致しており、 $d_H^{(2)}$ の正しさ示す結果が得られた。一方、領域 $0 < c \leq 1$ に対しては $d_H \approx 4$ となり、過去のデータと一致する結果ではあるが、2つの理論値の判定基準にはならなかった。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 河 本 昇
副 査 教 授 石 川 健 三
副 査 教 授 藤 本 正 行
副 査 助 教 授 中 山 隆 一

学 位 論 文 題 名

Monte Carlo study of two-dimensional quantum gravity coupled to weighted percolation cluster models

(重みつきパーコレーションクラスターモデルに結合した
2次元量子重力のモンテカルロシミュレーションによる研究)

現実の4次元空間での重力の量子化の問題は、素粒子論における未だ未解決の最も本質的な問題の一つである。ところが2次元の量子重力は、2次元基本単体である三角形をランダムに貼り合わせる事により、構成的に定義できる事が明らかになってきた。又2次元量子重力の本質的物理量は、フラクタル次元であることも明らかにされた。

重力の量子論は、物質場が存在する場合に本質的に影響を受けると考えられるが、2次元量子重力では、物質場の指標はセントラルチャージ c で表される。申請者はこの論文に於いて、重みつきパーコレーションクラスターモデルを2次元重力に結合した模型を用いて、セントラルチャージ c が $-2 \leq c \leq 1$ の領域で量子重力に対する物質場の影響を色々な物理量を数値的に計算する事により調べた。特にフラクタル次元の計算では、理論的に求められている、二通りの値の一方の予言である河本-綿引の結果とかなりの領域で一致することを数値的に確かめた。

2次元量子重力の本質はフラクタル構造に有る事が既に過去の計算によって示されているが、フラクタル次元の c 依存性を系統的に調べた例はこれまでにない。 $c = -2, 0, 0.5, 0.8$ 及び $c > 1$ で幾つかのグループがその計算を既に行っているが、必ずしも整合性の取れた結果になっていない。ここではこの問題に、特に $-2 \leq c \leq 1$ の領域で c 依存性がどのようになっているかを数値的に明らかにし、二つの理論予言の一つの結果が正しい事を示した。この計算は、3次元4次元の量子重力が格子上で定式化される為の、更なる傍証をとって注目すべき結果を与えている。この計算は、計算機を用いたモンテカルロ法による数値計算であり、模型の設定をもとに、計算機に乗せるまでのプログラムの作成、或いは計算手法の開発を、これまでの数値計算の経験を元に独自に開発した事、及びこれらの開発の過程で、他の模型での計算の失敗も踏まえ正しい模型を選択し最後まで数値計算の実行を行ったことは高く評価される。また申請者は、2次元量子重力の関連論文として、「Quantum geometry of topological gravity」, Phys. Lett. B 397 (1997) 177-184, と 「The

quantum space-time of $c = -2$ gravity」, Nucl. Phys. **B 511** (1988) 673-710, を出版しており、これらの論文での共同研究が本論文の研究のベースを与えた。

上記の研究成果により審査員一同、申請者が博士（理学）の学位を受けるに十分な資格があるものと認めた。