

学 位 論 文 題 名

$N = 4$ Supersymmetric Yang-Mills Theory
and Vafa-Witten Theory

($N = 4$ 超対称ヤン-ミルズ理論とヴァッファ-ウィッテン理論)

学位論文内容の要旨

超対称理論の双対性は、1994 年に Seiberg と Witten の仕事に端を発して精力的に研究が進められた。彼らの仕事は 4 次元の $N = 2$ 超対称理論に関する研究である。彼らは S-双対性と呼ばれる電場-磁場双対性を $N = 2$ 超対称理論に課すことにより、低エネルギー有効理論を厳密に解くことに成功した。同じ年、Witten は Vafa と一緒に 4 次元の $N = 4$ 超対称理論に関する仕事も発表した。一般に、超対称性の数を増やすと物理的自由度の数が少なくなり、重力を除いた 4 次元の理論では $N = 4$ が超対称性の最大の数である。更に、4 次元の $N = 4$ 超対称理論は有限で、共形不変である。また、この理論の S-双対性は Montonen-Olive の双対性を持つと思われている。Montonen-Olive の双対性とは、S-双対変換でゲージ群 G を持つ理論がその双対なゲージ群 $\hat{G}$ を持つ理論に変換される双対性である。Vafa と Witten は 4 次元の $N = 4$ 超対称理論のこの双対性を、分配関数を厳密に評価することで確かめようと試みた。その場合、最大の障害は強結合領域の寄与の評価方法である。そこで彼らは $N = 4$ 超対称理論そのものを扱う代わりに、ツイストされた $N = 4$ 超対称理論を扱い、この理論に対する分配関数を厳密に評価することを行った。ツイストされた超対称理論は位相的場の理論と呼ばれる結合定数や計量に依存しない理論で表わされるので、この計算が可能となったのである。

彼らはその仕事の中で次の 2 つの予想をした。

- (i) ツイストされた $N = 4$ 超対称理論の分配関数は、インスタントンモジュライのオイラー数を足し上げた形をしている。
- (ii) その分配関数は Montonen-Olive の双対性を持つ。

(i) の予想に対しては次のようにして示された。ツイストされた $N = 4$ 超対称理論の内、あるものがバランスト化された位相的場の理論で記述されることが分った。バランスト化された位相的場の理論とは、通常の位相的場の理論が位相的電荷が 1 つであるのに対して、位相的電荷を 2 種類持つ位相的場の理論である。このバランスト化された位相的場の理論をある種の多様体上（ケーラー多様体上など）で考えることにより (i) の予想が再現されることが示された。

一方、Vafa と Witten は (i) と (ii) を両方とも満たす分配関数を物理的な方法を用いて導出した。その導出方法とは、 $N = 4$ 超対称理論に質量項を加えることで $N = 1$ 超対称理論に簡略化することで分配関数を決定しようと言うものである。但し、この簡略化をツイストされた $N = 4$ 超対称理論に適用する場合注意を要する。まず注意すべき点は、位相的場の理論であるという性質を保ちつつ簡略化出来るのはケーラー多様体上に限られるという点

である。次に注意すべき点は、例えばケーラー多様体上でツイストされた $N = 4$ 超対称理論を考えたとしても、質量項の入り方からケーラー多様体は次の二つの部分に分れるという点である。一般に、ケーラー多様体中のある種の曲面上では質量項が消えてしまう。したがって、この曲面上では簡略化は起こらない。(この曲面のことを cosmic string と呼ぶ。) また、この曲面上以外の領域では質量項が存在して簡略化が起こる。(この領域のことを bulk と呼ぶ。) 以上の考察の下、Vafa と Witten は cosmic string 上と bulk では全く異なる寄与を分配関数に与えると考えた。そして各々の寄与の積としてツイストされた $N = 4$ 超対称理論の分配関数の形を提案した。(この分配関数を Vafa-Witten 公式と呼ぶ。) さらに、この Vafa-Witten 公式は (i) と (ii) を満たすように決められている。

本論文では、Vafa と Witten の (i)(ii) の予想に関して以下の二つの解析を行った。

(1) 本論文では、物質場のないツイストされた $N = 4$ 超対称理論に対して (i) の予想が成り立つのであるなら、バランスという性質を保ちつつ物質場が結合した理論へ拡張する事が可能であると考えた。そして、その場合同様の議論が展開できるか検証してみた。(この拡張された理論を Balanced Topological QCD と呼ぶ。) この方向の議論は障害におつかり検証は止まったが、その代わりこの Balanced Topological QCD の物質場のバランスを破った理論を考えた。(この理論を UnBalanced Topological QCD と呼ぶ。) この UnBalanced Topological QCD のある演算子の相関関数を計算することで次の様な非自明な結果を得た。インスタントン数 k でラベルされたインスタントンモジュライのオイラー数が Seiberg-Witten 不変量で記述される。

(2) 本論文では、多様体としてオービフォールド $T^4/\mathbf{Z}_2$ (4次元トーラスを $\mathbf{Z}_2$ で割ったもの) を選び、Vafa-Witten 公式の導出と同様の手順で分配関数がどの様に決定されるか確かめた。古典幾何学的には、オービフォールド $T^4/\mathbf{Z}_2$ はオービフォールド特異点と呼ばれる特異点を持つ。そして、この特異点をブローアップと呼ばれる操作をして特異点を解消し、 $K3$ 多様体が再現される。一般に、ブローアップとは多様体中の点を曲線に置き換える操作をいう。但し、今の場合は更に特異点を解消するという側面も持つ。前者の単なるブローアップを $O(-1)$ 曲線ブローアップと呼び、後者の特異点解消を伴ったブローアップを $O(-2)$ 曲線ブローアップと呼ぶ。したがって古典幾何学的には、オービフォールド $T^4/\mathbf{Z}_2$ に $O(-2)$ 曲線ブローアップを行うことにより $K3$ 多様体が再現される。(この操作を orbifold construction と呼ぶ。) 本論文では、この orbifold construction を分配関数レベルで実現しようとした。Vafa-Witten 公式の導出になぞらえると、ブローアップ前のオービフォールド $T^4/\mathbf{Z}_2$ (untwisted sector と呼ぶ) の分配関数への寄与は bulk 部分からの寄与に対応し、ブローアップの操作 (twisted sector と呼ぶ) は cosmic string 部分からの寄与に対応する。これらの寄与の積に対して、Vafa-Witten の予想の (ii) を課すと、確かに $K3$ の分配関数が再現できた。

以上のように、本論文では Vafa-Witten の予想の (i)(ii) を使うことによりツイストされた $N = 4$ 超対称理論の分配関数の決定方法を学ぶことが出来た。特に、orbifold construction を分配関数の決定に応用することは他の S -双対性を持つ分配関数の生成に適用できると思われる。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 河 本 昇
副 査 教 授 石 川 健 三
副 査 助 教 授 鈴 木 久 男
副 査 講 師 秦 泉 寺 雅 夫

学 位 論 文 題 名

$N = 4$ Supersymmetric Yang-Mills Theory and Vafa-Witten Theory

($N = 4$ 超対称ヤン-ミルズ理論とヴァッファ-ウィッテン理論)

2次元の共形場の理論は、対称性として高い共形不変性を持つことの帰結として、解ける場の理論であることが明らかになり、1980年代以降かなり長い間、素粒子論研究者の研究対象であった。これに対して、4次元で解ける場の理論の例は見つかっていませんでしたが、Seiberg-Witten が4次元の超対称性を持ち、超対称電荷が二つ有る $N = 2$ の超対称理論において、解析的に厳密な形で有効相互作用を導出した。それより更に高い対称性を持つ $N = 4$ の超対称理論は、 $N = 2$ の理論と同様に双対性を持つと予想されており、更にその分配関数はインスタントンモジュライのオイラー数を足しあげとして、トポロジカルな量で表されると予想される。これを具体的な形で提唱したのが Vafa-Witten の推論であり、具体的な計算はこれまでされていなかった。

申請者は本論文に於いて、 $N = 4$ の超対称性を持つ理論に対して、4次元空間としてオービフォルド T^4/Z_2 を取り、その持つ特異点をブローアップと呼ばれる特異点の解消の操作を行い、その結果この空間は $K3$ 多様体になるが、この空間での分配関数の計算を具体的に実行した。この計算において、Vafa-Witten の提唱した二つの推論を本質的に用いたが、具体的な計算により、これ等の推論が整合性の取れた主張であることを確かめた。

数学的にも、予想を超える内容を含んでおり物理、数学の融合した数理論理の領域での興味有る結果が得られ、数学的な観点からも興味有る結果で有ると専門家にも評価された。申請者は、これ等の研究成果を出すに至る以前に、共同研究として次の二編の論文を出版しており、ここでの研究の経験及び着眼点の訓練が申請者をして上記の研究に通じるベースを与えた。「Euler number of Instanton Moduli space and Seiberg-Witten invariants」hep-th/0005262, J. Math. Phys. 出版予定、「Seiberg-Witten Theory of Rank Two Gauge Groups and Hypergeometric Series」Int. J. Mod. Phys. A13 (1998) 3121-3144。

上記の研究成果により審査員一同、申請者が博士（理学）の学位を受けるに十分な資格があるものと認めた。