

学 位 論 文 題 名

Semilinear elliptic equations
on thin network-shaped domains

(細い領域における半線形楕円型方程式の解の漸近挙動)

学位論文内容の要旨

本論文では半線形楕円型方程式の境界値問題の解について、領域に関する特異振動問題を取り扱う。非線形楕円型方程式の解が領域の変形に関しどのような振舞いをするかという問題は重要でこれまでも多くの視点から研究されている。特に細い領域上の偏微分方程式の解について、領域が曲線に退化する場合の振舞は多くの研究者が様々な条件の元で考察している。それらの先駆的な仕事は Yanagida ('91) や Hale and Raugel ('95) らによってなされた。前者は曲線に退化する柱状領域において曲線上のある極限方程式が線形化の意味で安定な解を持つならば、柱状領域上の反応拡散方程式の安定な定常解が存在しその解は極限方程式の解に一樣収束することを示しており、後者は太さをあらわすパラメータ $\zeta > 0$ を持つ L 字型の細い領域上で半線形放物型方程式の解のアトラクタについて $\zeta = 0$ での連続性を示している。本論文はこれら先駆的な結果の一般化及び精密化である。すなわち、以下のような仮定を置き半線形楕円型方程式の解の領域に関する特異振動問題を考察した。まず領域であるが、その領域は太さパラメータ $\zeta > 0$ を持ち、 ζ が 0 に収束する時ある幾何学グラフに退化するような細い領域とする。ここで幾何学グラフとはいくつかの滑らかな曲線をつなぎあわせたものである。つまり、その領域とはいくつかの柱状領域を滑らかにつなぎあわせた領域で、 ζ が 0 に近づく時に細く痩せていき、その極限が幾何学グラフになる領域である。そのような領域上で半線形楕円型方程式 $\Delta U + f(U) = 0$ の解の ζ に関する漸近挙動を考える。ここで Δ はラプラシアンであり、 f は非線形項である。また、境界条件は次のように与える。考える領域はいくつかの柱状領域をつなぎ合わせたような領域であったが、その柱状領域の底面がその領域の境界となっている境界部分では Dirichlet 境界条件を与え、それ以外の境界部分では Neumann 境界条件を与える。この方程式の解 U_ζ が存在する場合、 U_ζ は ζ に関し連続的に変化することが知られているが、そのパラメータが 0 に収束する時、その極限はどのように表せるかごく簡単な場合を除いて明らかではない。特に、いくつかの曲線が一点で交わっているグラフに退化するような領域の場合、例えば Y 字のような三又の領域の場合、Y 字は 3 本の曲線が真中の 1 点で交わっているが、その点の近傍で U_ζ がどのような振舞をするかは自明ではない。しかし本研究で解が $\sup$ ノルムの意味でパラメータによらず有界である場合、 $\zeta \rightarrow 0$ としたときの極限方程式である、ある特殊な常微分

方程式系の解に一樣収束することを示した。ここで、ある特殊な常微分方程式系とは幾何学グラフの位相的性質とネットワーク型の領域から定まる常微分方程式系であり、上の Y 字の場合、

$$\frac{1}{a_i(s)} \frac{d}{ds} \left(a_i(s) \frac{du_i}{ds}(s) \right) + f(u_i(s)) = 0 \quad (0 < s < l_i), \quad i = 1, 2, 3,$$

$$u_1(0) = u_2(0) = u_3(0), \quad (*)$$

$$\sum_{i=1}^3 a_i(0) \frac{du_i}{ds}(0) = 0, \quad (**)$$

u_i の $s = l_i$ での Dirichlet 境界条件, $i = 1, 2, 3$

となる。ここで a_i は柱状領域の断面積の比率をあわらし、 u_i は各曲線上の関数である。 $u_i(0)$ は Y 字の中心の点での値であり、条件 (*) はその点での連続性、(**) はその点に流れ込む流量の総和が 0 であることをあらわしている。

逆にその常微分方程式系の解が存在する場合、その解がどのような条件を満たしていれば元の半線形楕円型方程式の解でその極限方程式の解に収束するものが存在するかという問題が起こる。本研究ではその点について、その極限方程式の解についてそのまわりでの線形化方程式の固有値問題が 0 固有値を持たなければ、その解に一樣収束するような偏微分方程式の解が存在するという結果を得た。極限方程式の解が線形化の意味で安定な場合は Yanagida ('91) で考察されているが本研究の結果により線形化の意味で不安定な解に対してもその解に一樣収束する偏微分方程式の解の存在を示すことができる。

上記の結果についてはネットワーク形領域において柱状領域の部分が一樣である場合は Kosugi ('00) において対応する結果を得ており、本論文の Part I でその詳細を述べている。しかし、その証明方法はそのまま非一樣な場合に適用できなかった。本研究ではその方法を非一樣な柱状領域の場合に応用できるよう新たな手法を開発し、本論文 Part II にその詳細をまとめた。

これらの結果を総合すると、その常微分方程式系の解が細い領域上の偏微分方程式の解を良く近似していることが明らかとなったが、その性質もよく近似しているのかという問題が残る。この点について、本研究では Liapunov の意味での安定性についてお互いに等しい性質を持つことを示した。つまり細い領域上の半線形楕円型方程式の解が極限方程式の解に一樣収束するとき、それらの解のまわりでの線形化方程式の固有値問題についてその第 1 固有値は $\zeta = 0$ で連続であることを示した。

これら本研究の結果により、その極限方程式の解は細い領域上の半線形楕円型方程式の解を性質まで込めてよく近似していることを明らかにした。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 神 保 秀 一

副 査 教 授 上 見 練太郎

副 査 教 授 儀 我 美 一

副 査 助 教 授 津 田 谷 公 利

学 位 論 文 題 名

Semilinear elliptic equations on thin network-shaped domains

(細い領域における半線形楕円型方程式の解の漸近挙動)

偏微分方程式 (PDE) の境界値問題の分野において、定義されている領域の大変形あるいは特異摂動に伴う解の挙動や構造の研究は 1980 年頃より始まり重要なテーマとなっている。代表的なものでは Matano, Hale-Vegas, Jimbo, Morita, Yanagida, Hale-Raugel らの研究があり、反応拡散方程式の解について、パターンフォーメーション等の面白い現象の解の構成、安定性、特異性などが研究されてる。反応拡散方程式等の楕円型方程式にみられる、領域の幾何的な形状や位相的な要因によって解の性質や構造が著しく影響を受けることが面白い解や挙動の数学現象の探求や構成を強く促している。またこれらの方程式はしばしば物理のモデル方程式となっていて、実際の現象で幾何的な形状が安定性などの主原因となるものもありその応用的関連からの動機付けともなっているからである。本論文もそのような研究の流れに乗っているといえる。本研究では 1 次元ネットワークに収束する多次元有界領域 (特異摂動領域) を考え、その上の半線形楕円型方程式のノイマン境界問題 (PDE) の解の特徴付けを研究した。まず解が極限においてネットワーク上の常微分方程式系 (ODE 系) の解に一樣収束することを証明した。またさらにその線型化スペクトルの特徴付けを与え解の構造を ODE 系の解の構造に結びつけた。これによって特異摂動領域上の PDE の力学構造 (安定性構造) まで込めて特徴付けたことになる。数学の技術的な側面から見ると、2 解楕円型方程式の解の評価理論におけるシャウダー評価および最大値原理を駆使して可変な特異摂動領域上の解の族のコンパクト性を独自の工夫による部分的な比較関数を用いて証明している。特筆すべき点は本研究の方法では退化するハンドル部分が非一様な場合でも解の一樣収束を自由に扱うことができより豊かなケースを扱うことが出来る点であり、高く評価される。とくに定常解の特徴付けという部分では Yanagida, Hale-Raugel の先駆的な研究を本質的に拡張していて大きな貢献を与えている。また、本研究の方法は他の反応拡散方程式系にも適用される可能性を有し PDE 研究に貢献される期待があります。

以上の審査結果によって学位申請者小杉聡史は、博士(理学)の学位を得る十分な資格があると認められます。