

学 位 論 文 題 名

The asymptotic behavior for the prediction error
and partial autocorrelation function
of a long-memory stationary process

(長期記憶を持つ定常過程の予測誤差と偏相関関数の漸近挙動)

学位論文内容の要旨

$\{X_t : t \in T\}$ を実弱定常過程とし、その自己共分散関数を $R(\cdot)$ と書く： $R(t) := E[X_t X_0]$ ($t \in T$). ただし、 $T = \mathbf{R}$ または $\mathbf{Z}$ とする。 $-\infty < d < 1/2$ に対して、 $R(\cdot)$ が

$$R(t) \sim k \times t^{2d-1} \quad (t \rightarrow \infty) \quad (1)$$

(k は定数) のように、通常の数関数的減衰とは異なり、ゆっくりと減衰するとき、 $\{X_t\}$ は長期記憶を持つという。長期記憶を持つような現象は古くから知られている。時系列解析の分野では、1980年代初頭に導入された fractional ARIMA モデルを始めとして、長期記憶を持つ定常過程は盛んに研究されている。ここでは、長期記憶を持つ定常過程の予測誤差と偏相関関数の漸近挙動を考える。本論文は、次の4部により構成される：

- I. On the asymptotic behavior of the prediction error of a stationary process
- II. Asymptotics for prediction errors of stationary processes with reflection positivity
- III. The asymptotic behavior of the prediction error for a continuous-time fractional ARIMA process
- IV. Partial autocorrelation functions of the fractional ARIMA processes with negative degree of differencing

I、II、IV は井上昭彦助教授との共同研究であり、III は単独の研究である。

I-III では、 $\{X_t : t \in \mathbf{R}\}$ の二乗平均予測誤差の漸近挙動を考える。区間 $I \subset \mathbf{R}$ に対して、 $P_I X_{t_0}$ を観測データ $\{X_s | s \in I\}$ に基づく X_{t_0} の線形最小二乗予測とする。そのとき、 $X_{t_0} - P_I X_{t_0}$ はその予測誤差と見なされる。 $t_0 > 0$ に対して、関数 $V_{t_0}(\cdot)$ を

$$V_{t_0}(t) = E[(X_{t_0} - P_{[-t,0]} X_{t_0})^2] - E[(X_{t_0} - P_{(-\infty,0]} X_{t_0})^2] \quad (t > 0)$$

で定めて、 $t \rightarrow \infty$ のときの $V_{t_0}(\cdot)$ の漸近挙動について考える。この問題の主要な難しさ

は、有限の過去を用いた予測 $P_{[-t,0]}X_T$ の漸近解析が難しいという点にある。

この問題を考えるきっかけになったのは、定常時系列の偏相関関数の漸近挙動に関する数値実験である。その結果からの類推により、「(1) が成り立つ時の $V_{t_0}(\cdot)$ の漸近挙動は、 $-\infty < d < 0$ と $0 < d < 1/2$ とでは全く異なり、特に、後者においては $V_{t_0}(t) \sim \text{const.} \times t^{-1}$ ($t \rightarrow \infty$) と、 t の指数は d に依存しない」と予想した。

I では、 $0 < d < 1/2$ に対して (1) を満たすある特別な定常過程 $\{X_t : t \in \mathbf{R}\}$ を考え、 $V_T(\cdot)$ の漸近挙動に関する、次の驚くほど単純な形の結果を示す：

$$V_{t_0}(t) \sim t^{-1} d^2 \left\{ \int_0^{t_0} C(s) ds \right\}^2 \quad (t \rightarrow \infty). \quad (2)$$

ただし、 $C(\cdot)$ は $\{X_t\}$ の標準表現核を表す。I の証明では Krein の予測理論を用いて $V_T(\cdot)$ を具体的に計算するが、I で扱う特別な $\{X_t\}$ 以外、その方法を適用することは難しい。

II では、鏡映正值性を持つ定常過程に対し、上の予想を証明する。即ち、(1) を仮定すると、 $0 < d < 1/2$ の場合は (2) が成り立ち、 $-\infty < d < 0$ の場合には

$$V_{t_0}(t) \sim t^{4d-1} \frac{k^2}{(1-4d) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} R(s) ds \right\}^2} \left\{ \int_0^{t_0} C(s) ds \right\}^2 \quad (t \rightarrow \infty)$$

と、 t の指数は d に依存する。ここでは述べないが、 $d = 0$ に対する結果もある。実は、これらの主張は次の様に統一できる： $-\infty < d < 1/2$ に対して (1) が成り立つならば

$$V_{t_0}(t) \sim \int_t^{\infty} \left\{ \frac{R(s)}{\int_{-s}^s R(u) du} \right\}^2 ds \cdot \left\{ \int_0^{t_0} C(s) ds \right\}^2 \quad (t \rightarrow \infty). \quad (3)$$

この結果の証明では、有限の過去からの予測に関する量である $V_T(\cdot)$ を、無限の過去、未来からの予測に関する量で近似したものについて漸近解析を行なう。

III では、fractional ARIMA 過程の連続時間版である $\{X_t : t \in \mathbf{R}\}$ を考え、上の予想とは異なる結果を示す： $d \in (-1/2, 1/2) \setminus \{0\}$ に対して (1) を仮定すると、 $0 < d < 1/2$ のみならず、 $-1/2 < d < 0$ に対しても (2) が成り立つ。ここでも、その結果は (3) の形で書ける。この結果の証明では、無限の過去からの予測による表現定理を証明し、それを有効に用いる。この III の結果は I の結果の完全な一般化になっている。

長期記憶を持つ時系列の解析において、fractional ARIMA(p, d, q) 過程 $\{X_n : n \in \mathbf{Z}\}$ は重要なモデルである。その自己相関の長期的な挙動はパラメータの d で特徴付けられる。即ち、 $d \in (-1/2, 1/2) \setminus \{0\}$ ならば、(1) が成り立つ。IV では、fractional ARIMA(p, d, q) 過程の偏相関関数 $\alpha(\cdot)$ の漸近挙動について考え、次を示す： $-1/2 < d < 0$ ならば、

$$|\alpha(n)| \sim t^{-1} |d| \quad (n \rightarrow \infty)$$

が従う。これは、 $0 < d < 1/2$ の場合の井上先生の以前の結果の拡張である。この結果の証明は、連続時間の場合に述べた $V_{t_0}(\cdot)$ の類似物に対する漸近解析を用いて行なわれる。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 津 田 一 郎
副 査 教 授 辻 下 徹
副 査 助教授 井 上 昭 彦
副 査 助教授 三 上 敏 夫

学 位 論 文 題 名

The asymptotic behavior for the prediction error and partial autocorrelation function of a long-memory stationary process

(長期記憶を持つ定常過程の予測誤差と偏相関関数の漸近挙動)

この学位申請論文は、長時間の記憶を持つ（離散および連続時間の）定常過程の（有限の過去に基づく）予測誤差と偏相関関数に関するものである。特に、予測に用いる過去のデータを増やしていった時の、これらの量の漸近挙動に注目し、計算機による数値実験等により予測されたある漸近公式を、数学的に正しく定式化し証明している。

論文はIからIVまでの4部よりなる。Iでは、特殊なモデル（連続時間のfractional ARIMA過程の最も簡単なもの）について、上の漸近公式を実際に証明している。これにより、よい理論を展開できる可能性が初めて数学的に示されたと言える。尚、証明の方法は、予測誤差をKreinの理論を用いて具体的に計算するというハードなものである。IIからIVでは、Iとは全く異なる方法を用いる。IIでは、予測誤差に対する示したい漸近公式を、鏡映正值性を持つ連続時間定常過程のクラスというあるプロトタイプに対して、完全に示している。IIIでは、Iで扱ったモデルの最も一般的な拡張である任意の連続時間のfractional ARIMA過程に対して、この予測誤差に対する漸近公式を示している。IVでは、離散時間のfractional ARIMA過程で、パラメータ d が $-1/2 < d < 0$ の場合に、偏相関関数の漸近挙動に関する示したい公式を示している。これは、 $0 < d < 1/2$ の場合の既知の結果の拡張になっている。

以上のように、本申請論文は、定常過程の予測理論における殆ど手のつけられていない重要な問題に対し、決定的な結果を得ている点で、応用数学に貢献するところ大なるものがある。よって申請者は、北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格あるものと認める。