博士（理　学）　上　田　肇　一

学 位 論 文 題 名

A Manner of Splitting in Dissipative Systems

（散逸系におけるパルスの分裂の仕方について）

学位論文内容の要旨

近年、散逸系において自己複製パターンが注目されているが、自己複製現象は散逸系において現れる遷移現象の好例であるといえる。最近、西浦・上山は自己複製ダイナミクスが「極限点の整列階層構造の端」という大域分岐構造の結果、必然的に現れる現象であるということを実験数学的な手法で解明した。申請者は自己複製パターンによってパルスがどのように増えていくのかということに注目した。結果、あるクラスの反応拡散方程式において分裂現象はパルスの両端のみが分裂するということを証明した。

自己複製によって遷移過程、つまりパターンがどのように変化するのかといったことを解析的に理解するには上で述べたような大域的な構造を調べるだけでは不十分である。一方で解を直接導き出そうとする方法は非線形の偏微分方程式が一般的に解くことが困難であることに加え、扱う系が少しで違うと解を再構成する必要がある為、このような方法では一般的な枠組みにおいてパターン形成を理解することは難しい。そこで少し視点を変え、安定な１山パルス解を仮定し、そらにそのパルスが空間上に多数存在した場合のダイナミクスを考える。もしパルス間の距離が非常に離れているとするとそれらはお互い形を変化させることなく、非常に弱い相互作用をする。そのような発想から、パルス間の弱い相互作用に関する研究が栄らによって盛んに行われてきた。さらに自己分裂現象に関しては極限点の存在が重要であるということは先に述べたが、パルス間の相互作用とパルスの分裂に伴う変形に対し、その極限点の近傍で構成された不変多様体上における常微分方程式が栄、西浦、及び本申請者によって導出されている。

申請者は上で述べた常微分方程式を解析することによって、初期値として１次元空間上に置かれた有限個のパルスのなかでどのパルスが最初に分裂する条件を満たすのかを解析した。その結果を用いて連続した分裂過程における分裂の様子を明らかにするという方法をとった。前者の解析に関しては、常微分方程式からパルスの分裂はその両側（端のパルスに関しては片方）のパルス間の距離がある一定の値にまで大きくなることが重要であることが既にわかっている。常微分方程式を解析した結果一番先に分裂する条件を満たすのは両端のパルスであることを導いた。しかし連続したパルスの分裂過程の様子を知る為にはある困難がある。上で述べた常微分方程式はパルスが変形し初めまでは記述できるが、大きく変形するところは記述できず、いくつかの仮定をしなければならない。申請者はこのような解の軌道に対して自然な仮定を用い、連続した分裂過程を考える方法をとった。この仮定のもとで、自己複製パターンは両端のパルスが分裂することによってパルスが増殖していくことを証明した。

申請者はある反応拡散方程式においてパルスの分裂は両端のみで起きることを証明した。パターン形成に関してまだ未解決な問題は数々存在する。例えば１次元上のあるコンパクト区間におけるパルスの選択波長問題もその一つである。ここで申請者が行ったパターン形成の理解に対する手法はこのような問題に対しても、適用可能であると思われる。

学位論文審査の要旨

主　査　　教　授　　西　浦　廉　政
副　査　　教　授　　神　保　秀　一
副　査　　教　授　　儀　我　美　一
副　査　　教　授　　津　田　一　郎

学位論文題名

A Manner of Splitting in Dissipative Systems

（散逸系におけるパルスの分裂の仕方について）

近年、散逸系において自己複製パターンが注目されている。自己複製現象は散逸系において現れる遷移過程の好例である。パターン形成における遷移過程は数理的に興味深い現象であるが、そのような現象を理解するための数学的な枠組みが明らかでなく、また遷移過程そのものも問題として取り上げられることも少なかったため、その方面の研究は遅れていた。西浦・上山は Gray-Scott モデルの自己複製ダイナミクスに対して注意深い実験数学的な方法により、自己複製ダイナミクスが「極限点の整列階層構造の端」という大域分岐構造の結果として必然的に現れる現象であることを明らかにした。しかし自己複製がどのような仕方で分裂して行くのかという遷移過程の詳細は大域分岐構造を数値的に明らかにするだけでは不十分であり、なんらかのより深い数学的考察が求められる。最近、数値実験によって、Gray-Scott モデルを含む反応拡散方程式のあるクラスにおいて自己複製は端に位置するパルスのみで起きるという興味深い現象が確認されている。本論文では１次元空間において両端のパルスのみが分裂することの必然性を自然な仮定の下で、数学的に厳密に示すことに成功した。パルスの分裂は極限点近傍で起きる現象であり、その極限点から不安定多様体がどのように延びているかは数値実験によって詳しく調べられている。１山パルスは極限点近傍において不安定化を起こしその不安定化する方向はある１つの固有関数に沿って変形を開始し、その後は自然と２山パルスになることが数値実験から分っている。一方、多数のパルスが互いに十分離れて空間に配置された時、パルス同士はどのような相互作用をするのかについて考える。それらはパルスのテールを通して、非常に弱い相互作用をしながら運動する。このようなパルス間の弱い相互作用に関しては栄、Sandstede らによって盛んに研究されており、今考えているクラスの方程式に関してはパルスが互いに反発的に運動することがわかる。さらに極限点近傍において前述の不安定固有関数を用いることにより局所不変多様体を構成できることが栄、西浦、及び本申請者によって明らかにされており、構成された不変多様体上においてパルス間の弱い相互作用とパルスの変形のダイナミクスを決定する常微分方程式を導出することができる。その常微分方程式の解析をすることによってパルスの分裂が起きる条件を求めることができ、実際パルスの分

裂はそのパルスと両隣のパルス間距離がある一定の値（クリティカルな距離）に達した時分裂が開始することがわかる。本論文ではまず空間上に置かれた有限個のパルスを初期値にとり、その中のパルスのどれが最初に分裂を開始するのかを考察している。上の議論よりどのパルスが分裂するのかという問題はどのパルス間距離が最初にクリティカルな距離に達するのかという問題に帰着される。常微分方程式の解析から、自然な初期値に対しては必ず両端のパルスがクリティカルな距離に最初に達することがわかり、両端のパルスが最初に分裂し始めるという結果を得ることができた。さらにこの結果を用い１山パルスからの分裂の仕方を考察している。このとき注意しなければならないのは、今まで述べた解析は常微分方程式が極限点近傍においてのみ有効であることである。つまり我々が常微分方程式でダイナミクスを理解できるのは分裂直後までであるということであり、分裂後パルスが大きく変形するというダイナミクスは解析することができない。そこで１山パルスが大きく変形し２山に分裂するまでの解軌道の存在を仮定し、分裂しているパルスに対してはその解を用い、分裂していないパルスの解との和をとることでパルスが大きく変形している間においても真の解に良く近似した解を構成することができた。このような仮定の下で連続したパルスの分裂過程を考えることが可能となり、結果として両端のパルスのみが分裂することを証明することができる。以上の結果は大変形を伴う遷移的ダイナミクスの典型である自己複製パターンに対して、始めて厳密な証明がなされたものであり、その意義は大きい。さらにここで開発された手法はパターン形成に関する未解決の問題、例えば１次元上のコンパクト区間における波長選択問題に対しても新たな知見を与えるものである。

以上の結果により、申請者は，北海道大学博士 (理学) の学位を授与される資格あるものと認める.