

学 位 論 文 題 名

On applications of localization of characteristic classes

(特性類の局所化理論の応用について)

学位論文内容の要旨

複素解析幾何学, 代数幾何学における様々な大域不変量は指数定理によって特性類の積分に還元されるが、その値は双対定理により homology 類に関連付けられる。これらの対応は指数公式と呼ばれ、重要な対象と認識されかつ様々な場面において研究されているが、それら一連の公式群は多くの場合、特性類の局所化により留数定理として非常に簡単な原理をもって理解することが可能である。このことを、より数学的に表現すると以下の様に述べられる。すなわち特別な集合 S を除いた相対 cohomology から cohomology への自然な射においてある特性類の持ち上げが存在する場合、それは Alexander の双対性によって S の homology 類に対応する、すなわち S に局所化されるわけである。したがって、ある大域不変量に関する公式を得るには、対応する特性類の Alexander 双対性における対応を具体的に記述すればよいという事になる。ところで、相対 cohomology への持ち上げの存在は S の外部における特性類の消滅に由来すると考えられるのであるが、この感覚の正当化とあわせ、上述の局所化の記述を与える有効な方法が Čech-de Rham cohomology における Chern-Weil 理論である。この方法論は局所化の原理を極めて直観的に記述するのみならず、その最大の特色は局所不変量の具体的計算方法をも与えるという点である。我々は以上の方法論の、Riemann-Hurwitz の公式、Lefschetz の不動点公式、及び Milnor 数公式に対する応用をそれぞれ考察する。

第一の場合、Riemann-Hurwitz の公式は compact 複素多様体間の分岐被覆において位相的 Euler 指標の比較を与える公式であるが、それは写像の微分が分岐の外では接束の同型をあたえることから、両者の Euler 類の差は分岐を除けば消滅することを原理とする。したがって、上述の方法は Euler 類のみならず一般の Chern 多項式で与えられる特性類に対し適応可能である。この観察に基づき、我々は分岐因子が非特異である場合に Chern 数公式:

$$\begin{aligned} c_1^{N_1} \cdots c_n^{N_n}(Y) - \mu \cdot c_1^{N_1} \cdots c_n^{N_n}(X) \\ = \sum_i \sum_t \left(H_{TR_{i_t}}^{(N_1 \cdots N_n)}(c_1(L_{R_{i_t}})) \cap [R_{i_t}] - n_{i_t}(r_{i_t} + 1) H_{TB_i}^{(N_1 \cdots N_n)}(c_1(L_{B_i})) \cap [B_i] \right) \\ = \sum_i \sum_{\alpha=0}^{n-1} \left(\sum_t \frac{n_{i_t}(1 - (r_{i_t} + 1)^{\alpha+1})}{(r_{i_t} + 1)^\alpha} \right) P_\alpha(c_1(B_i) \cdots c_{n-1}(B_i)) \cdot c_1(L_{B_i})^\alpha \cap [B_i] \end{aligned}$$

の証明をあたえる。その結果は、Chern 多項式で表される全ての種数に応用され、特に L

種数については巡回被覆に対する Hirzebruch 符号数公式の複素解析的曲面の場合における一般化:

$$\text{Sign}(Y) - \mu \cdot \text{Sign}(X) = - \sum_i \frac{n_{i_t} r_{i_t} (r_{i_t} + 2)}{3(r_{i_t} + 1)} B_i \cdot B_i$$

を含む。

第二の場合、Lefschetz の不動点公式は一般の楕円型複体に対して与えられ、古典的な実及び複素の場合の不動点公式はそれぞれその de Rham 複体、Dolbeault 複体の場合に相当する。これらの場合では、大域不変量に相当する Lefschetz 数は直積の中での対角集合と写像の graph の交点数に付随し、従って対角集合の Thom 類の積分として表現される。一方、不動点の近傍において、写像の graph は適当な改変によって対角集合の法束の切断とみなせるため、その零集合の外側では最高次の特性類は消滅する。したがって我々の方法が適用され、Thom 類が graph にそって不動点集合に局所化される。この方法によれば、抽象的な形式ではあらゆる不動点集合に対し公式の形が得られ、さらに孤立不動点の場合には局所的な Lefschetz 数が Bochner-Martinelli 核で表わされることが明らかなため、証明が極めて簡素化されると共に、必ずしも非退化でない場合にも全く同様の議論を可能とする。

第三の場合、Milnor 数公式についてであるが、これも第一の場合と同様、終集合はそのまま、始集合のみ高次元化したという意味で Riemann-Hurwitz の公式の一般化の一種とみなせる。一般に臨界点を除いたところで正則写像は可微分写像として局所自明であり、したがって位相的 Euler 指標は Fiber と底空間のその積に分裂するが、その大域的障害が臨界点における Milnor 数である。そして、この事は次の事実の反映である。すなわち、臨界点を除いたところでは関数の微分が余接束の切断を定めるため、最高次の特性類はその零点を除いた所で消滅し、その留数が勾配 vector の指数すなわち関数の Milnor 数に一致する。我々はこの考えに基き、同公式の特異解析集合上の関数（正確には閉曲線への写像）に対する一般化を考察する。具体的には余接束を仮想余接束に置き換える事によって、非特異の場合と全く同様の議論により、位相的 Euler 指標の分裂に関する誤差の評価を与える公式として、特異多様体上の Milnor 数公式:

$$(-1)^n (\chi(V) - \chi(\mathcal{F})\chi(C)) = \sum_{\text{Sing}(V)} (\text{Vir}(f, S_\alpha) - \mu(V, p)) + \sum_{C(f)} \mu(f, C_\alpha)$$

を定式化する。ところで、特異点における関数の Milnor 数の定義については幾種類かの定義が考えられているが、この場合における解析集合の特異点に現れる留数

$$\mu(f, S_\alpha) := \text{Vir}(f, S_\alpha) - \mu(V, p)$$

は、上に述べた大域的指標の分裂の誤差としての Milnor 数という解釈において、その新たな定義の方法を与えたと考えられる。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 諏 訪 立 雄

副 査 教 授 小 野 薫

副 査 教 授 中 村 郁

副 査 助 教 授 石 川 剛 郎

学 位 論 文 題 名

On applications of localization of characteristic classes

(特性類の局所化理論の応用について)

複素解析幾何学, 代数幾何学における様々な大域不変量は指数定理によって特性類の積分に還元されるが, その値は双対定理によりホモロジー類に関連付けられる. これらの対応は指数公式と呼ばれ, 重要な対象と認識されかつ様々な場面において研究されているが, それら一連の公式群は多くの場合, 特性類の局所化により留数定理として非常に簡単な原理をもって理解することが可能である. この局所化の記述を与える有効な方法が Čech-de Rham コホモロジーにおける Chern-Weil 理論である. この方法論は局所化の原理を極めて直観的に記述するのみならず, その最大の特色は局所不変量の具体的計算方法をも与えるという点である. これらにより, 著者は次のような結果を得ている:

- (I) 古典的な Riemann-Hurwitz の公式は二つの Riemann 面の間の分岐被覆写像に対し, それら Riemann 面の Euler 数の間の関係を与える. これを一般の高次元複素多様体の間の分岐被覆写像に対し, 任意の Chern 数の間の関係を与える公式に一般化した. これは F. Hirzebruch による巡回被覆に対する指数の間の公式を特別な場合として含む.
- (II) 特異点を持つ多様体上の正則関数に対し, Milnor 数の概念を導入し, 複素多様体から Riemann 面への正則写像に対する Milnor 数公式を多様体が特異点も許す場合に拡張した.
- (III) (n, n) -型の Thom 類の概念を導入し, 正則写像に対する Lefschetz 不動点定理の証明, および不動点が退化した場合も込めた不動点指数の計算を自然で見通しの良いものとした.

これを要するに, 著者は, 複素解析幾何学における基本的かつ一般的結果を得たものであり, これらは種々の特異点における局所的な不変量およびそれらの空間の大域的な不変量との関係の解明に極めて有用で, 同分野に貢献するところ大なるものがある.

よって著者は, 北海道大学博士(理学)の学位を授与される資格あるものとみとめる.