

学 位 論 文 題 名

算 術 と 論 理

－フレーゲ論理主義の再評価－

学位論文内容の要旨

この論文の主題は、ドイツの哲学者であり論理学者および数学者でもあったゴットロープ・フレーゲ（1848–1925）が構想した論理主義の現代的観点からの再評価である。フレーゲは自ら二階の論理の体系を構築し、この体系のもとで、数学を論理学の諸原理から導出しようと試みた。論理主義とは、数学が論理的原理から導出でき、その意味で論理的原理によって基礎づけられるとする見方を指す。

フレーゲの企ては、ラッセルのパラドクスの発見により、まずはその体系の基本原理の修正を余儀なくされ、ついには断念されることになった。同じ頃相次いだ諸パラドクスの発見が、数学の基礎の探究を呼び起こし、数学基礎論という領域を成立させる。この流れの中でフレーゲの構想は、いったんは過去の遺物と見なされるが、1980年代のいわゆる「フレーゲの定理」の再発見により状況が変化する。この定理によれば、今日ヒュームの原理と呼ばれている原理から、二階の論理のもとで、算術の公理化に必要な諸原理が導出できる。こうして、ヒュームの原理を公理に採用し、パラドクスを回避しつつ、フレーゲの論理主義を継承しようとするライトらの試みが登場する。本論文において再評価の対象とされるのは、このライトらにより修正された形でのフレーゲの論理主義である。

本論文は、序論と4つの章からなり、序論では、歴史的経緯の概観とともに、本論文の課題と構想が示されている。

続く第1章「論理主義のプログラム」においては、フレーゲの前期の著作『算術の基礎』で提示された論理主義のプログラムの一つの特徴をなす、いわゆる文脈原理が取り上げられている。この原理は、語の意味を、その語が登場している文の脈絡のもとで問うよう要求する原理である。この原理は同書において、《文が全体として意義をもつならば、文の各部分も意味を得る》という、一見ラッセル流の文脈的定義を擁護するかに見える発言を伴って登場している。しかし文脈的定義が、数への言及を回避する手段として活用されうるのに対して、フレーゲは、文脈原理を背景にして、数が名辞によって言及される客観的对象であると結論することを目指していたのである。結局フレーゲは『算術の基礎』では、文脈的定義を検討しはしたものの、概念の外延という観念に訴えて、基数を明示的に定義する道を選ぶ。その際この明示的定義に基づいて、文脈的定義の内容に相当する言明が導かれることになるが、この言明がヒュームの原理に他ならない。この原理を公理として採用することでも、算術は展開できたはずであったが、論理主義のプログラムを実行に移した著作『算術の基本法則』において実際に採用されたのは、この原理ではなく、関数の値域の同一性の規準を与える第5公理（基本法則V）であった。標準的な解釈によれば、パラドクス発生の原因となったのはこの公理である。第1章では、これらの点が綿密に文献的に跡付けられ、次章以降の議論の

準備が整えられている。

第2章「構成主義からの説明要求」の主題は、直観主義者ダメットのフレーゲ批判である。フレーゲは『算術の基本法則』において、適正に形成された名辞が必ず指示対象をもつことを証明しようと試み、それに成功したと考えていた。ダメットは、この証明が成功していたならば、それはフレーゲの体系の無矛盾性証明の役割を果たしたはずであったと指摘し、証明が不成功に終わった原因を明らかにしようとする。本申請者は、オリバーの研究をも援用しつつ、2階の量化に関するフレーゲの無頓着な態度にパラドクス発生の原因を求めたダメットの難解な議論を綿密に跡づけたのち、これに反論したブーロスの、同じく難解な異論を詳細に取り上げている。ブーロス、フレーゲの第5公理から矛盾が導けることを証明し、さらに、二階の算術が無矛盾ならば、二階の論理にヒュームの原理を付け加えたものも無矛盾であるという、自らの証明した事実を援用して、パラドクスの原因が第5公理にあると論じている。この両者の議論がすれ違う有様を分析することにより本申請者は、この論争から学べる教訓として、フレーゲを継承しようとする者にとっては、単に矛盾をブロックできるようなシステムを手直しするだけでは問題が解決しないことを指摘している。フレーゲのように、われわれの認識とは独立に存在する数学的実在を認めるプラトニストにとっては、そのような数学的実在がいかにしてわれわれにとって理解可能であるのかの説明が要求されるのである。この課題が次章以降の主題となる。

第3章「抽象的対象の擁護」においては、数が具体的な対象ではないことから生ずる問題が取り上げられる。フレーゲのプラトニズムの特色は、単称名辞という文法的観念によって対象の一般観念を捉えようとする点にある。要するに対象とは単称名辞の意味するものであるとみなすのであるが、ここで提起されるのが、所与の言語表現が単称名辞であるかどうかの判定基準をいかにして確立しようかという問題である。また、数詞が単称名辞と認められ、数が対象と認められたとしても、われわれがそのような抽象的存在者をいかにして認識、理解しようのかという問題もなお残る。本申請者はこれらの点を指摘したうえで、文脈原理と文脈的定義をめぐる問題の検討に基づいて、ヒュームの原理を採用する修正された論理主義についての課題を明らかにしている。論理主義は、数に関するわれわれの理解が、ヒュームの原理の把握からどのように構成されるのかを説明しなければならないため、この原理は無内容であってはならないが、この原理が豊かな内容をもてばもつほど、論理的原理がそれほど豊かな内容をいかにしてもちうるのかを説明することが困難になる。このジレンマを克服することが論理主義の課題なのである。

第4章「論理主義のジレンマの克服」においては、このジレンマ克服の可能性が問われることになる。フレーゲは、演繹的推論がわれわれの認識の拡張をもたらすという事実を、推論の際に同じ思想が複数の仕方で分解され、異なる概念が析出されることに訴えて説明しようとした。ライトはこのフレーゲの着想を援用して、論理的真理が無内容であるという通念を打破し、上記のジレンマを克服しようとしている。本申請者は、この試みが成功するためには、ヒュームの原理が、数の同一性の基準を与えるだけでなく、他の種の対象から数を区別する基準をも与える必要があることを指摘している。その見通しが得られなかったことが、フレーゲがヒュームの原理を公理とする道を取らなかった理由である。この困難を克服するためには、算術の議論領域の特定化手続きに対するダメットの批判に答える必要がある。また論理主義者は、ヒュームの原理を論理的真理とみなすことに対するブーロスらの批判にも答える必要がある。これらの課題を確認したうえで本申請者は、算術と論理をわれわれの経験全体のうちに位置づける視点の必要性を指摘している。そのような視点のもとで、論理的真理の本性が解明されてはじめて、これらの課題に答えることが可能になるのであり、論理主義の継承には、そこまで深く問題を掘り下げる必要があるというのが、本論文の結論である。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 山 田 友 幸

副 査 教 授 小 野 芳 彦

副 査 助 教 授 中 戸 川 孝 治

学 位 論 文 題 名

算 術 と 論 理

－ フレーゲ論理主義の再評価 －

本論文の主題は、ドイツの哲学者であり論理学者および数学者でもあったゴットローブ・フレーゲ（1848–1925）が構想した論理主義の現代的観点からの再評価である。フレーゲは自ら二階の論理の体系を構築し、この体系のもとで、数学を論理学の諸原理から導出するというプログラムに取り組んだ。論理主義とは、数学が論理的原理から導出でき、その意味で論理的原理によって基礎づけられるとする見方を指す。

フレーゲのプログラムは、ラッセルのパラドクスの発見により、まずはその体系の基本原理の修正を余儀なくされ、ついには断念されることになった。同じ頃、いくつかのパラドクスが相次いで発見された結果、数学の基礎への関心が高まり、数学基礎論という領域が成立する。この流れの中でフレーゲの構想は、いったんは過去の遺物と見なされるにいたるが、1980年代のいわゆる「フレーゲの定理」の再発見により状況が変化する。この定理によれば、今日ヒュームの原理と呼ばれている原理から、二階の論理のもとで、算術を公理化するために必要な諸原理を導くことができる。通常理解では、フレーゲの体系からパラドクスが生じた原因となったのは第5公理である。そこで第5公理にかえて、ヒュームの原理を公理に採用するという修正により、ラッセルのパラドクスを回避しつつ、フレーゲの論理主義を継承しようとするライトらの試みが登場する。本論文で再評価の対象とされるのは、このライトらにより修正された形でのフレーゲの論理主義である。

本論文では、申請者は、ライトらの試みが成功するための条件を詳細に明らかにしている。まず問題になるのは、フレーゲの論理主義が、数学的対象の実在を認める数学的プラトニズムと結びついている点である。修正された論理主義においては、公理に採用されたヒュームの原理が、数を表す表現の文脈的定義の役割を果たすが、文脈的定義は、単なる取り決めと見なされる場合には、数への言及を回避する手段としても利用できる。そのため、フレーゲのプラトニズムを継承しようとする限り、文脈的定義を単なる取り決めとして正当化するわけには行かないことを本申請者は本論文の第3章で指摘している。また本申請者は第2章において、フレーゲの体系からパラドクスが発生した原因の診断をめぐるダメットとブーロスの論争を詳細に分析することにより、フレーゲの論理主義を継承するためには、単にパラドクスをブロックするだけでは不十分であることを明らかにしている。論理主義者は、論理的原理からいかにして数学的実在に関する理解が構成され得るのかを説明できなければならないのである。そのためには、一方ではヒュームの原理が数

の概念を与えるほどに豊かな内容をもつことを明らかにしつつ、それを論理的原理と見なすことをも正当化しなければならない。本申請者は、本論文第4章において、これらの制約を満たしつつ論理主義を継承するためには、算術と論理をわれわれの経験全体のうちに位置づける視点が必要であると指摘している。そのような視点のもとで、論理的真理の本性を解明することができてはじめて、上述の制約を満たすことが可能になるというのが、本論文の結論である。

このように本論文は、フレーゲ論理主義の継承が、今日いかにして可能であるかを理論的に研究したものである。その際本申請者は、まず第一に膨大な研究文献の検討を行い、異なる立場を背景にもつ研究者たちの展開しているきわめて錯綜した論争の争点を整理し、いくつかの難解な議論に関してはその筋道を詳細に跡づけつつ、論争状況の従来にない鮮明な鳥瞰を与えるとともに、最新の研究の到達点を明らかにしている。また第二に、この成果に基づいて本申請者は、フレーゲ流の論理主義の継承の試みが成功するための必要条件と、その達成のための制約を明らかにすることに成功している。この成果は、今後のフレーゲ研究において共有されるべき共通理解を形成しうるものであり、その貢献は高く評価することができる。また、この過程で示された、二階の論理および算術にかかわる形式的議論と非形式的議論の双方に関する本申請者の確かな知識と理解、とりわけ、構成主義的数学観を奉じ、集合論自体にも疑いの目を向けるダメットと、集合論の枠組みのもとで古典数学を保持しようとするブーロスの間の錯綜した論争の分析に示された深くて確かな理解は、本申請者がこの分野の研究者として今後も着実な成果をあげることが十分に期待されるものである。関連する問題の中には本論文で詳しく取り上げられていないものもあるが、それらを今後の発展的研究の対象とする準備は本研究により整っており、更なる成果が期待される。以上により本委員会は、全員一致で、本申請者に博士（文学）の学位を授与することが妥当であるとの結論に達した。