

学 位 論 文 題 名

Cyclides as surfaces which are characterized by circles

（円によって特徴付けられる曲面としてのサイクライド）

学位論文内容の要旨

3次元ユークリッド空間内の球面には様々な幾何学的な特徴付けがある。球面がいわゆる“丸い”形であるということを円を用いて、次のようにいうことが出来る：与えられた閉曲面上の任意の位置に任意の半径の円を浮き上がることなく押しあてることができるならば、この曲面は球面である。

しかし、この方法は「任意の位置」「任意の半径」という点で膨大な情報を必要とする。よって出来るだけ少ない情報量で球面であるかを判定したいと考えるのは自然な問題である。そこでいろいろな曲面に対して、曲面上の各点に対して、その点を通る円で曲面に含まれるものの個数に注目すると、球面や平面は各点に対して無限個の円を含むが、他の曲面はそれほどたくさんの円を含んでいないことに気がつく。例えば、円柱は各点を通り、1個の円を含み、楕円面はほとんどの点に対して2個ずつ円を含んでいる。回転トーラスは各点に対して、4個ずつ円を含んでいる。

1980年、Richard Blum は genus 1 のなめらかな閉曲面で曲面上の各点に対して、6個ずつ円を含む曲面を見つけた。そして、予想1：「3次元ユークリッド空間内のなめらかな閉曲面で曲面上の各点に対して、7個以上の円を含む曲面は球面である」という予想をたてた。

1984年には荻上、高木が、“なめらかな曲面で曲面上の各点に対して、その点で互いに接する2個の円を含む曲面は球面または平面の一部である”ということを示し、楕円面に注目して、予想2：「3次元ユークリッド空間内の単連結、完備でなめらかな曲面で曲面上の各点に対して、2個以上の円を含むものは球面または平面である」という予想をたてた。これに対して、筆者は肯定的な解答として“3次元ユークリッド空間内の単連結、完備でなめらかな曲面で曲面上の各点に対して、3個以上の円を含むものは球面または平面である”という結果を得ている。

これら2つの予想に対する部分的な解答を与えるのが本論文の1つの目的である。さらに、これらの予想を解決する過程で、円を含む曲面としての“Cyclides”が重要な例であることを述べ、共形幾何学的観点からの分類および円によるさまざまな特徴づけとそれにより、予想3：「3次元ユークリッド空間内の完備でなめらかな曲面で曲面上の各点に対して、2個以上の円を含むものは Cyclides である」を与える。

本論文は3つの章からなり、Chapter I では、4、5または6個の円を含む曲

面の例と円による曲面の幾何学的構成を与える。例えば、円をある軸を中心に回転させてできる曲面 (Hulahoop Surfaces と呼ぶ) は各点に対して5つの円を含む曲面であることを示す。また、Darboux が紹介した4、5または6個の円を含む genus 1 の閉曲面に対して、その曲面上のすべての円の存在を利用することにより、その曲面に球の包絡面としての3種類の構成方法があることを示した。Chapter II では予想1,2に対する肯定的な部分的解答を与える。特に、genus 1 のなめらかな閉曲面に関しては曲面上の各点に対して、7個以上の円を含む曲面は存在しないことを示した。また、凸閉曲面では曲面上の各点に対して、固定された半径の円を1つ含むものは球面であるという結果を得た。これは与えられた曲面が、固定された大きさの円を押し当てることにより、球面であるかどうかを判定できるという実用的な定理である。Chapter III では3次元ユークリッド空間内で次の式：

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 + 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \sum_{i=1}^3 b_i x_i + \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^3 a_i x_i + a = 0$$

で定義される "Cyclides" の共形幾何学での完全な分類をおこなった。結果としてなめらかな Cyclides は

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 - 2a_1 x_1^2 - 2a_2 x_2^2 - 2a_3 x_3^2 + a = 0, (a \neq 0)$$

で定義される位相的にトーラスであるか、又は、1つまたは2つの球に共形同値であり、特異点をもつものは2次曲面に共形同値であることがわかった。さらに、球面または平面以外の Cyclides はその形状により、1つの n ($n = 1, 2, 3, 4, 5$ または 6) の値が定まり、曲面上の各点に対して、その点を通り曲面に含まれる円の個数がその点が non-umbilic なら n 個、孤立した umbilic なら $(n-1)$ 個である曲面ということを示した。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 泉 屋 周 一
副 査 教 授 山 口 佳 三
副 査 助 教 授 石 川 剛 郎
副 査 助 教 授 清 原 一 吉

学 位 論 文 題 名

Cyclides as surfaces which are characterized by circles

(円によって特徴付けられる曲面としてのサイクライド)

3次元空間内の球面の特徴付けは微分幾何学における伝統的な問題である。この、問題に関して、球面がいわゆる“丸い”形であるということに関連して、円を用いて、以下のような事が知られていた：“与えられた閉曲面上の任意の位置に任意の半径の円を浮き上がることなく押しあてることができるならば、この曲面は球面である。”しかし、この主張は「任意の位置」「任意の半径」という点で膨大な情報を必要とする。よって出来るだけ少ない情報量で球面であるかを判定したいと考えるのは自然な発想である。1980年、Richard Blumは穴が一つあいたなめらかな閉曲面で曲面上の各点に対して、6個ずつ円を含む曲面を見つけた。そして、予想1:「3次元空間内のなめらかな閉曲面で曲面上の各点に対して、7個以上の円を含む曲面は球面であろう」という予想をたてた。さらに、1984年には荻上、高木が、“なめらかな曲面で曲面上の各点に対して、その点で互いに接する2個の円を含む曲面は球面または平面の一部である”ということを示し、予想2:「3次元空間内の単連結、完備でなめらかな曲面で曲面上の各点に対して、2個以上の円を含むものは球面または平面であろう」という予想をたてた。これに対して、以前に、申請者は“3次元空間内の単連結、完備でなめらかな曲面で曲面上の各点に対して、3個以上の円を含むものは球面または平面である”という肯定的な部分解答を与えた。これら2つの予想に対する部分的な解答を与えたのが本論文の1つの結論である。さらに、これらの予想を解決する過程で、円を含む曲面としての“Cyclides”が重要な例であることを述べ、共形幾何学的観点からの分類および円によるさまざまな特徴づけとそれにより、予想3:「3次元空間内の完備でなめらかな曲面で曲面上の各点に対して、2個以上の円を含むものはCyclidesであろう」を与えた。本論文は3つの章からなり、Chapter Iでは、4、5または6個の円を含む曲面の例と円による曲面の幾何学的構成を与えている。例えば、円のある軸を中心に回転させてできる曲面（Hula hoop Surfaces と呼ぶ）は各点に対して5つの円を含む曲面であることを示した。また、Darbouxが紹介した4、5または6個の円を含む穴が一つあいた閉曲面に対して、その曲面に球の包絡面としての3種類の構成方法があることを示した。Chapter IIでは予想1,2に対する肯定的な部分的解答を与えている。特に、“穴が一つあいたなめらかな閉曲面に関しては曲面上の各点に対して、7個以上の円を含む曲面は存在しない”ことを示した。また、“凸閉曲面では曲面上の各点に対して、固定された半径の円を1つ含むものは球面である”という定理を示した。これは与えられた曲面が、固定された大きさの円を押し当てることにより、球面であるかどうかを判定できるという実用的な定理である。Chapter IIIでは3次元空間内で

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 + 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \sum_{i=1}^3 b_i x_i + \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^3 a_i x_i + a = 0$$

で定義される “Cyclides” の共形同値での完全な分類をおこなった。結果としてなめらかな Cyclides は

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 - 2a_1x_1^2 - 2a_2x_2^2 - 2a_3x_3^2 + a = 0, (a \neq 0)$$

で定義される位相的にトーラスであるか、又は、1つまたは2つの球に共形同値であり、特異点をもつものは2次曲面に共形同値であることを示した。さらに、球面または平面以外の Cyclides はその形状により、1つの n ($n = 1, 2, 3, 4, 5$ または 6) の値が定まり、曲面上の各点に対して、その点を通り曲面に含まれる円の個数がその点が臍点でないなら n 個、孤立した臍点なら $(n-1)$ 個である曲面であるということを示した。

共形同値での分類では円であることを保つため、円が多く載っている曲面の研究と言う本論文の目的にかなうものである。さらに、このような観点からの分類は、従来の代数幾何学や位相幾何学的な分類などとは異なった観点からの研究であり、非常に独創的なものであると言える。

これを要するに、著者は古典的微分幾何学における、球面の特徴付け問題及び “Cyclides” の共形幾何学的分類に関して新知見を得たものであり、微分幾何学に貢献すること大なるものがある。

よって著者は、北海道大学博士 (理学) の学位を授与される資格あるものと認める。