博士（理　学）　佐　藤　功　視

学位論文題名

BF Gravity on the Lattice

（格子上の *BF* 重力理論）

学位論文内容の要旨

Kawamoto と Nielsen は、Regge の格子重力理論に格子ゲージ理論の考えを取り入れた格子ゲージ重力模型を提案した。本論では、これを元に定式化した三次元の格子 Chern-Simons 重力模型と、その四次元への拡張である格子 BF 重力模型について述べる。

三次元 Einstein 重力がトポロジカルな場の理論である Chern-Simons 理論によって記述出来ることは Witten によって示された。この Witten の Chern-Simons 重力では、ゲージ群が三次元 Poincaré 群 $ISO(2,1)$ の時には宇宙項無しの、三次元 de Sitter 群 $SO(3,1)$ 及び anti de Sitter 群 $SO(2,2)$ の時には、それぞれ正及び負の宇宙項がある場合の Einstein 重力を記述している。

Horowitz は Chern-Simons 重力をトポロジカルな性質を保ったまま四次元に拡張した。これは BF 理論と呼ばれる。四次元の Einstein 重力は三次元と異なりトポロジカルではないため、四次元 BF 理論は Einstein 重力そのものを記述してはいないが、Einstein 重力が $SO(3,1)$ BF 理論に適当な拘束条件を加えた形に書き換えられることは既に Plebanski によって示されていた。従って $SO(3,1)$ BF 理論は四次元 Einstein 重力を考える際の一つの良い出発点を与える。BF 理論の作用を構成する際任意のゲージ群を選ぶことが出来るが、このような理由から、ここでは特に $SO(3,1)$ BF 理論を四次元 BF 重力と呼ぶ。

さて Regge の格子重力理論によれば、単体分割された d 次元多様体において $(d-2)$-単体上、すなわち、二次元ではサイト（0-単体）、三次元ではリンク（1-単体）、四次元では三角形上（2-単体）に曲率が集中している。一方格子ゲージ理論によれば、正方格子で分割された平坦な時空のリンク上に接続場の指数関数であるリンク変数を対応させて、最小の正方形に沿ってリンク変数の積を取れば格子間隔の最低次で曲率の指数関数が得られる。この二つの考えを踏まえて、d 次元の単体的複体において $(d-2)$-単体に双対なリンク上にスピン接続のリンク変数を乗せて、ある $(d-2)$-単体の周りに沿って積を取れば、その $(d-2)$-単体に集中した曲率の指数関数が得られるであろう、と言うのが格子ゲージ重力の基本的な考えである。

三次元 Chern-Simons 重力の基本変数はスピン接続とドライバインである。そこで格子 Chern-Simons 重力ではドライバインを四面体の辺の上に乗せて、それに双対なリンク上にスピン接続を乗せることで、四面体の辺（1-単体）上に集中した曲率を構成する。一方 Chern-Simons 重力の作用は三次元 BF 理論とも見なすことが出来るため、素朴に四次元 BF 理論に拡張できる。その際スピン接続はそのまま引き継がれるが、ドライバインは 2-フォーム B に拡張される。そこで四次元格子 BF 重力では 2-フォーム B を三角形の上に、それに双対なリンク上にスピン接続を乗せて、三角形（2-単体）の上に集中した曲率を構成する。これらの模型では、通常の格子ゲージ理論と異なりリンク変数の積の対数を曲率と定

義する。この量は高次の項まで含んでいるため通常の格子ゲージ理論で定義される曲率とは異なるが、対数を取ったこととホロノミーが無いという拘束条件を加えることにより三次元ではドライバインの、四次元では2-フォームの長さが自然と離散化すると言うのが、これらの模型の大きな特徴である。このホロノミー無しの条件はゲージ固定条件と解釈することが出来る。

また分配関数を構成して、三次元ではドライバインとスピン接続、四次元では2-フォームとスピン接続に関する積分を実行することが出来る。その結果は、三次元では Ponzano-Regge 模型に、四次元では Ooguri-Crane-Yetter 模型に一致する。

6-j 記号と四面体（3-単体）との対応関係に基づいた Ponzano-Regge 模型は、三次元の格子重力模型として古くから知られている。この模型の特徴は多様体の分割の仕方に依らないことであり、更に Ooguri, Sasakura により $ISO(3)$ Chern-Simons 理論と一致することが示されている。しかし、その対応関係の詳細、例えばドライバインやスピン接続などの Chern-Simons 重力の変数が Ponzano-Regge 模型において何に対応しているのかと言ったことは明らかではなかったのであるが、格子 Chern-Simons 重力との一致により、それが明白になった。スピン接続に関しては積分されてしまい Ponzano-Regge 模型の表式には陽に現れていないが、格子 Chern-Simons 重力の離散化されたドライバインの長さが Ponzano-Regge 模型の角運動量に一致している。また、両者の一致により直ちに格子 Chern-Simons 重力も多様体の分割の仕方に依らない模型であることが分かり、その重要な帰結として連続極限が分割を任意に細く出来ると言う意味で自明に取れることが保証される。

一方 Ooguri-Crane-Yetter 模型は Ponzano-Regge 模型を四次元に拡張した模型である。この模型は Ponzano-Regge 模型と同様に多様体の分割に対して不変な模型である。また 4-単体の構造を反映して 15-j 記号が現れる。この模型は BF 理論との関係が示唆されていたが、格子 BF 模型との一致により、その対応関係が明白になった。

格子 Chern-Simons 重力と格子 BF 模型は格子ゲージ理論の一種なので、連続理論に存在するゲージ対称性に対応した格子上の対称性を持っていることが期待される。連続理論には二つの独立なゲージ対称性が存在してその一つは局所 Lorentz 変換であるが、これらの格子模型の作用は、この変換に対応する格子上の変換の下での対称性を通常の格子ゲージ理論と同様な形で明白に保つように構成されている。一方連続理論の作用には、Bianchi 恒等式に基づく別のゲージ対称性が存在する。これに対応する対称性が格子の作用に存在するかどうかは自明でないが、まず格子上の Bianchi 恒等式を示し、更にこれを用いて実際にこの対称性を持っていることを示すことが出来た。

学位論文審査の要旨

主　査	教　授	河　本　　昇
副　査	教　授	石　川　健　三
副　査	教　授	藤　本　正　行
副　査	助教授	中　山　隆　一
副　査	助教授	鈴　木　久　男

学位論文題名

BF Gravity on the Lattice

(格子上の *BF* 重力理論)

重力の量子化の問題は、素粒子論における未だ未解決の最も本質的な問題の一つである。この問題の解決に現在超弦理論が最も有力と考えられているが、この方向と違う方向の可能性として格子上での重力の定式化が有る。申請者はこの方向からの重力の量子論の問題に取り組んできた。その結果申請者は本論文で３次元の重力理論、及び４次元のアインシュタイン重力に通じる *BF* 理論を局所的な場を用いて格子上で定式化する事に成功した。３次元の連続のアインシュタイン重力理論は、Chern-Simons 作用を用いてゲージ理論として定式化されており、6-j symbol による定式化の Ponzano-Regge 模型との関連が指摘されていた。ここでは具体的な格子上の模型を構成する事により、両者の理論が同一視されることを具体的に示した。また連続理論で定義された局所的な場が、格子上の何処に乗っているかを明確にした。この定式化を４次元に拡張し、アインシュタイン重力に通ずると考えられている *BF* 理論の格子状の定式化を 15-j symbol を用いて具体的に示した。この様に３，４次元でリンク上及び三角形上に乗せる場が、自然に不連続化されそれぞれ 6-j symbol 及び 15-j symbol と関連付けられ、連続極限が解析的に取れ、格子理論と連続理論の関係が明確になった。これらの３，４次元の重力の格子上での定式化は、局所的なゲージ場を用いての定式化として始めての例になっている。これらの定式化は、トポロジカルなゲージ理論がその本質に有る定式化で、現実の４次元のアインシュタイン重力は、重力子が力学的な自由度を持つために更に工夫が必要と考えられるが、現実の４次元重力の場の理論的記述に道を開く可能性の有る定式化と期待される。３次元の定式化は「Lattice Chern-Simons Gravity via Ponzano-Regge model」、として Nucl.Phys.B555(1999)629-649 に既に発表されており、４次元の定式化も「4-dimensional *BF* Gravity on the Lattice」として、Nucl. Phys. B574(2000)809-848 に出版された。

これ等の仕事は３，４次元の重力理論を具体的に局所的なゲージ場で格子上に定式化し連続極限が解析的に取れることを示した始めての理論で大変価値の高いオリジナルな内容であり、これ以後この仕事の色々な応用が期待され高く評価される。

よって審査員一同、申請者が博士（理学）の学位を受けるに十分な資格があるものと認めた。