

学 位 論 文 題 名

Chracterizations of Bloch space and Besov spaces by oscillations

(振動による Bloch 空間と Besov 空間の特徴づけ)

学位論文内容の要旨

複素平面上の開単位円板を D とし、 D 上の正規化された 2 次元 Lebesgue 測度を $dA(z) = r dr d\theta / \pi$ とする。そして $d\lambda(z) = \frac{dA(z)}{(1-|z|^2)^2}$ と表示する。また $\beta(z, w) := \frac{1}{2} \log \frac{1+|\varphi_z(w)|}{1-|\varphi_z(w)|}$, $\varphi_z(w) = \frac{z-w}{1-\bar{z}w}$ とする。このとき $0 < r < \infty$ に対して、 $D(z, r) = \{w \in D; \beta(z, w) < r\}$ は Bergman disc と呼ばれ、 $|D(z, r)|$ は $D(z, r)$ の正規化された面積を表示するものとする。ある D 上の関数 f に対して、 $\sup_{w \in D(z, r)} |f(z) - f(w)|$ を f の振動、 $\frac{1}{|D(z, r)|} \int_{D(z, r)} |f(z) - f(w)| dA(w)$ や $\frac{1}{|D(z, r)|} \int_{D(z, r)} |\hat{f}_r(z) - f(w)| dA(w)$ を f の平均振動と呼ぶことにする。ここで $\hat{f}_r(z) := \frac{1}{|D(z, r)|} \int_{D(z, r)} f(w) dA(w)$ とする。

$1 < p < +\infty$ に対して、Besov 空間 B_p は $\|f\|_{B_p} := \left(\int_D (1-|z|^2)^p |f'(z)|^p d\lambda(z) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$ を満たす D 上の解析関数全体からなる空間である。特に $p = 2$ のときは B_2 は Diriclet 空間となっている。 $p = 1$ に対して、Besov 空間 B_1 は $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \varphi_{\lambda_n}(z)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty (\lambda_n \in D)$ を満たす D 上の解析関数全体からなる空間であるとする。Bloch 空間は $\|f\|_B := \sup\{(1-|z|^2)|f'(z)|; z \in D\} < +\infty$ を満たす D 上の解析関数全体からなる空間であり、 B と表示される。ここで表記法の都合上、 $B_\infty = B$ と書くことにする。

本研究において扱っている主要な問題は、 D 上の解析関数がいつ Bloch 空間、Besov 空間に属するのかを振動や平均振動という概念を用いて特徴づけることである。K. Zhu は次のような結果を証明した： $r \in (0, \infty)$ とする。そのとき $1 < p \leq \infty$ 、 D 上の解析関数 $f(z)$ に対して次の (1) ~ (4) は同値である：

$$(1) f \in B_p; \quad (2) \sup_{w \in D(z, r)} |f(z) - f(w)| \in L^p(D, d\lambda); \quad (3) \frac{1}{|D(z, r)|} \int_{D(z, r)} |f(z) - f(w)| dA(w) \in L^p(D, d\lambda); \quad (4) \frac{1}{|D(z, r)|} \int_{D(z, r)} |\hat{f}_r(z) - f(w)| dA(w) \in L^p(D, d\lambda).$$

しかし、この結果は $p = 1$ の場合に対しては (2) ~ (4) を満たす D 上の解析関数は定数しかないため適用出来ない。そこで、「 D 上の解析関数 f に対して、 $n \geq 2$ のとき、すべての $1 \leq p \leq \infty$ に関して、 $f(z)$ が空間 B_p に属する必要十分条件は $(1-|z|^2)^n f^{(n)}(z) \in L^p(D, d\lambda)$ である」(定理 A) という結果を利用して、我々は $p = 1$ の場合にも適用出来る次のような定理を導き出した(定理 2.3、定理 3.3)： $r \in (0, \infty)$ とし、 $n = \alpha + \beta$ 、 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とする整数 $n \geq 0$ を固定する。そのとき、 D 上の解析関数 $f(z)$ に対して次の (1) ~ (4) は同値である：

$$(1) f \in B_p; \quad (2) \sup_{w \in D(z, r)} (1-|z|^2)^\alpha (1-|w|^2)^\beta |f^{(n)}(z) - f^{(n)}(w)| \in L^p(D, d\lambda);$$

$$(3) \quad \frac{1}{|D(z, r)|} \int_{D(z, r)} (1 - |z|^2)^\alpha (1 - |w|^2)^\beta |f^{(n)}(z) - f^{(n)}(w)| dA(w) \in L^p(D, d\lambda);$$

$$(4) \quad \frac{1}{|D(z, r)|} \int_{D(z, r)} (1 - |z|^2)^\alpha (1 - |w|^2)^\beta |\widehat{f^{(n)}}_r(z) - f^{(n)}(w)| dA(w) \in L^p(D, d\lambda).$$

この結果は $n \geq 1$ のとき、 $p = 1$ の場合も含めたすべての $1 \leq p \leq \infty$ に対して成立していると同時に、 $n = 0$ のときは K. Zhu の結果そのものであるという意味でこの完全な一般化となっている。また空間 B_p の別の特徴づけとして、K. Stroethoff は次のような結果を示した： $2 < p < \infty$ のとき、 D 上の解析関数 f に対して、 $f(z)$ が空間 B_p に属する必要十分条件は

$$\int_D \int_D (1 - |z|^2)^{\frac{1}{2}p} (1 - |w|^2)^{\frac{1}{2}p} \left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} \right|^p d\lambda(w) d\lambda(z) < +\infty. \quad \dots (*)$$

この結果は $1 \leq p \leq 2$ の場合、条件 (*) を満たす D 上の解析関数は定数しかない。そこで $1 \leq p \leq 2$ のときにも適用出来るこのタイプの新たな f の振動、平均振動を導入した： $r \in (0, \infty)$ とし、 $1 = \alpha + \beta$ 、 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とする。そのとき、

$$\sup_{w \in D(z, r)} (1 - |z|^2)^\alpha (1 - |w|^2)^\beta \left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} \right|, \frac{1}{|D(z, r)|} \int_{D(z, r)} (1 - |z|^2)^\alpha (1 - |w|^2)^\beta \left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} \right| dA(w).$$

これらの振動、平均振動をそのまま利用して空間 B_p を特徴づけることも出来るが、それだけでは先程と同様に $p = 1$ のときには適用出来ない。そこで再度、定理 A を考慮して、すべての $1 \leq p \leq \infty$ に対して成立する次のような定理を導き出した (定理 2.7、定理 3.5)： $r \in (0, \infty)$ とし、 $n = \alpha + \beta$ 、 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ となる整数 $n \geq 1$ を固定する。そのとき、 D 上の解析関数 $f(z)$ に対して次の (1) ~ (3) は同値である：

$$(1) \quad f \in B_p; \quad (2) \quad \int_D \left(\sup_{w \in D(z, r)} (1 - |z|^2)^\alpha (1 - |w|^2)^\beta \left| \frac{f^{(n-1)}(z) - f^{(n-1)}(w)}{z - w} \right| \right)^p d\lambda(z) < +\infty;$$

$$(3) \quad \int_D \left(\frac{1}{|D(z, r)|} \int_{D(z, r)} (1 - |z|^2)^\alpha (1 - |w|^2)^\beta \left| \frac{f^{(n-1)}(z) - f^{(n-1)}(w)}{z - w} \right| dA(w) \right)^p d\lambda(z) < +\infty.$$

この結果は $n \geq 2$ のとき、すべての $1 \leq p \leq \infty$ に対して成立している。本研究では他にも幾つかの振動、平均振動を定義し、それらを利用して注 2.4、2.6、2.8、2.10、3.4、3.6 で空間を特徴付けている。例えばつぎのような平均振動を定義した：

$$\frac{1}{|D(z, r)|} \int_{D(z, r)} \log^+ \left((1 - |z|^2)^\alpha (1 - |w|^2)^\beta \left| \frac{f^{(n-1)}(z) - f^{(n-1)}(w)}{z - w} \right| \right) dA(w).$$

さらにこれらの結果は、little Bloch 空間、 α -Bloch 空間、little α -Bloch 空間、 α -Besov 空間 (これらの定義はここでは省略する) にも応用出来ることも系 2.5、2.9、第 5 章で証明した。

学位論文審査の要旨

主査	教授	中路	貴彦
副査	教授	井上	純治
副査	教授	岸本	晶孝
副査	教授	林	実樹廣

学位論文題名

Chracterizations of Bloch space and Besov spaces by oscillations

(振動による Bloch 空間と Besov 空間の特徴づけ)

単位開円板上の正則関数のなす Banach 空間である Besov 空間 B_p ($1 \leq p \leq \infty$) は、Bergman 空間上の Hankel 作用素の研究に現れたこともあって、深く研究されてきた。 B_∞ は Bloch 空間、 B_2 は Dirichlet 空間と呼ばれている。 B_p は、 $1 < p \leq \infty$ のときは微分を用いて定義されるが、 $p = 1$ のときはその様な定義はできない。S.Axler, K.Zhu や K.Stroethoff 等によって研究され、 $p = 1$ のときも含む全ての p についての自然な特徴付けがある。本論文では、全ての Besov 空間 B_p ($1 \leq p \leq \infty$) の関数の様々な振動を用いての特徴付けに成功している。

K.Zhu はいくつかの振動を用いて B_p ($1 < p \leq \infty$) の特徴付けを与えているが、しかし $p = 1$ のときに成功していない。本論文では $p = 1$ のときも含む B_p のいくつかの振動を用いての特徴付けを微分を用いて与えている。K.Stroethoff は、ある振動を用いて B_p ($2 < p < \infty$) の特徴付けを与えたが、これは明らかに $1 \leq p \leq 2$ の場合に適用できない。本論文では、K.Stroethoff の用いた振動に類似した振動を用いて全ての B_p ($1 \leq p \leq \infty$) の特徴付けを与えている。

以上の申請者の研究は、Besov 空間の特徴付けについて、全ての p の場合に通じる大変興味ある特徴付けを与えるもので、博士（理学）の学位を得るにふさわしいものである。