

学 位 論 文 題 名

Sheaves on the category of periodic observation
Reconstruction of global dynamics
from personal observatons

(周期観測圏上の層－部分的周期的観測結果からの
大域的力学構造の再構築)

学位論文内容の要旨

近年、複雑系の数理的研究において、従来の力学系的な枠組みでは取り扱えないようなテーマの重要性が認識されはじめ、動的対象をとらえる新たな数学的枠組みの構築が問題となっている。本研究は、層の理論に基づく新たな数理的枠組みを導入することにより、単一の対象を複数の観測者が異なるタイムスケールで観測して得られるデータを統合して単一のモデルを構築する作業を明確にすることを目指した。

この枠組みは以下のように定式化される。対象は、ある離散力学系 $D = (X, \tau)$ に従っているものとするが、この力学系は観測者には知られていないものとする。ここで、 X は有限集合、 $\tau : X \rightarrow X$ は状態遷移規則とする。さて、観測者の集合 $P_i (i \in I)$ が、各観測量 $x_i : X \rightarrow X_i$ を時間間隔 T_i ごとに観測し、発展規則 $\tau_i : X_i \rightarrow X_i$ を見いだしたとする、すなわち、

$$\tau_i(x_i(x)) = x_i(\tau^{T_i}x)$$

が成り立っていたとする。このとき、離散力学系の族

$$\left\{ D_i = (X_i, \tau_i) \mid i \in I \right\}$$

を得る。逆に、このような離散力学系の族が与えられたとき、もとの離散力学系 D の情報をどこまで回復できるか、という問題が生じる。

この問題は、各 D_i を、 D に関する部分情報と考えるとき、整合性のある局所情報から大域的情報を再構築する問題ととらえることができる。この種の問題は通常、

層の理論で取り扱うことが可能である。すなわち、 D_i 達をある圏の上の準層ととらえ、適当なグロタンディエック位相による層化として解決できる。

学位論文では、対象が自然数、射が $\beta_{n,mn} : nm \rightarrow n$ と $\alpha_n : n \rightarrow n$ から生成され、交換関係

$$\beta_{nn} = 1_n$$

$$\beta_{l,m}\beta_{m,n} = \beta_{l,n}$$

$$\alpha_m^n \beta_{m,mn} = \beta_{m,mn} \alpha_{mn}$$

(m, n は自然数, $n > 1$) を満たす圏を導入した。これは群論の文脈では、整数の加法群の部分群圏と呼ばれるものである。この圏に適切なグロタンディエック位相を導入するとき、いくつかの条件の下で、層化作用が大域的モデルを正確に再構成することを明らかにした。

学位論文審査の要旨

主査	教授	辻下	徹
副査	教授	吉田	知行
副査	教授	津田	一郎
副査	助教授	辻井	正人

学位論文題名

Sheaves on the category of periodic observation Reconstruction of global dynamics from personal observatons

(周期観測圏上の層－部分的周期的観測結果からの
大域的力学構造の再構築)

近年、複雑系の数理的研究において、従来の力学系的な枠組みでは取り扱えないようなテーマの重要性が認識されはじめ、動的対象をとらえる新たな数学的枠組みの構築が問題となっている。特に、単一の超越的観察者を想定して理論を構築する方法の限界は多くの研究者により意識されている。その限界を越えるときに最初に問題になることは、単一の対象を複数の観測者が各々独自の方法により観測して得られたデータから構築されたモデル達を統合することであり、これは普遍的重要性を持つ課題といえることができるが、その問題の理論的構造を解明する試みは皆無に近い。

本論文では、次のような簡単な状況を設定して、上記のテーマの基本的な問題点を明確にしている：すなわち「単一の動的対象を複数の観測者が一定の時間間隔を置いて観察するが、観測の仕方と時間間隔とが観測者によって異なる」という状況である。

数学では、局所的な情報の集まりで整合性のあるものから大域的な情報を再構成する問題には、一般に層(sheaf)の理論が有効なことが経験的に知られている。本論文では、上記

の問題にも層の理論が有効であることを示したものである。この論文の基盤となるカテゴリーNは、自然数が、乗除関係についてなす半順序集合をカテゴリーとみなしたものに、各対象に自明でない自己射を添加したものである。各対象nは、時間間隔n 置いて対象を観測する観測者を表す。この圏の上の前層（プレシーフ）は、各観測者が得る力学系モデルの族を表現するが、一部の観測者達が報告する「現状」から、対象の現状を再構成するには、色々な条件が必要なことは言うまでもない。

本論文は、局所的な報告から全域的状况を把握できる条件を明確に述べるために、上述のカテゴリーNにグロタンディエック位相を導入した。この位相に関する層であれば、観測者の稠密な集まりを考えると、その観察結果は全体の状態を特定することができることがわかる。

本論文は、離散力学系で与えられる対象から定まる前層を層化する問題を解決し、一般には、局所的な観察から全域的な構造を再構成する場合に、仮想的状態が多く混入することを示すと共に、その混入の事情を明確にした。

これを要するに、本論文は、単一の対象の複数の観測者が異なる方法で得た知識を統合するという、今後重要性を増すことが予測される問題について、具体的な設定を通してその問題いくつかの様相を明確にしたもので、貢献する所大なるものがある。

よって著者は、北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格あるものと認める。