

学 位 論 文 題 名

Ideal CR-submanifolds

(イデアル CR 部分多様体)

学位論文内容の要旨

リーマン不変量のなかで古くから、断面、リッチ、スカラー曲率などが研究されてきた。最近、Bang-Yen Chen が次のような新しいタイプのリーマン不変量を定義した。

$$\delta(n_1, \dots, n_k)(p) = \tau(p) - \inf\{\tau(L_1) + \dots + \tau(L_k)\},$$

ここで τ はスカラー曲率, $L_1, \dots, L_k$ は互いに直交する $T_p M$ の部分空間で $\dim L_j = n_j, j = 1, \dots, k$ である。

さらに彼は実または複素空間形の部分多様体に対して、この不変量と外在的な量である平均曲率を含む不等式を構成した。新しいタイプのリーマン不変量と、これを含む不等式はいろいろな情報を与えてくれる。例えば、部分多様体のこの新しい内在的な量を知ることで、外在的な量である平均曲率を評価することができる。また、部分多様体論の最も基本的な問題のうちの一つである、リーマン多様体から実または複素空間形への挿入可能性も分かる。具体的に極小、ラグランジアンまたはスラント挿入であるための必要条件を与えてくれる。さらに、この不変量はラプラシアン第一固有値とも関係しており、コンパクト既約等質空間の第一固有値の下限を与えてくれる。

あるリーマン多様体 M から実または複素空間形への挿入が存在し、それが不等式の等号を満たしているということは、各点でその挿入が外空間から最も少ないテンションをうけていることを意味している。つまりその挿入は、 M からの挿入のなかで最も平均曲率が小さいことになる。

この不等式の等号を満たす部分多様体を *ideal* 部分多様体という。このような部分多様体を知ることは非常に興味深いことであり、たくさんの幾何学者によって研究され、いろいろな例が知られている。M.Dajczer と L.A.Floit はユークリッド空間内の $\delta(2)$ に関する *ideal* 極小部分多様体を完全に分類した。さらに彼らは、ユークリッド空間または球面内の極小でない 4 次元以上の $\delta(2)$ に関する *ideal* 部分多様体を完全に分類した。3 次元の場合はまだ完全に分類されていない。B.Y.Chen は複素空間形内の *ideal* ラグランジアン部分多様体を研究しており、最近それらが極小であることを示した。また彼は、複素双曲空間内の $\delta(2)$ に関する 3 次元 *ideal* ラグランジアン部分多様体を完全に分類した。また、複素空間形内の $\delta(2)$ に関する *ideal* 実超曲面も彼によって完全に分類されている。さらに、彼と L.Vrancken は複素双曲空間内の $\delta(2)$ に関する 3 次元 *proper ideal* CR 部分多様体を完全に分類した。

概複素多様体の部分多様体上に、微分可能な正則分布でその直交補空間が全実分布であるようなものが存在するとき、その部分多様体を CR 部分多様体という。その部分多様体が正則でも全実でもないとき *proper* とよばれる。正則断面曲率 4ϵ の m 次元複素空間形 $M^m(4\epsilon)$ 内の $2n$ 次元最大正則分布を持つ $(2n+p)$ 次元 CR 部分多様体に対して、次のような不等式が成り立つ。

$$(1) \quad \delta(n_1, \dots, n_k) \leq c(n_1, \dots, n_k)H^2 + b(n_1, \dots, n_k) + 3 \quad (\text{for } \epsilon = 1),$$

$$\delta(n_1, \dots, n_k) \leq c(n_1, \dots, n_k)H^2 - b(n_1, \dots, n_k) - 3n$$

$$(2) \quad +\frac{3}{2} \sum_{i=1}^k n_i \quad (\text{for } \epsilon = -1),$$

ここで b, c は正の定数である.

この論文では, 非平坦な複素空間形内の一般次元 proper ideal CR 部分多様体, つまり (1), (2) の等号を満たす部分多様体について研究している.

まず最初に, 我々は $n_1 = \dots = n_k = 2, p = 1$ の場合に (2) の等号を満たす部分多様体について研究した. それらの平均曲率ベクトル場 $\vec{H}$ が常に, 全実分布に複素双曲空間の複素構造 J を作用させた空間の中に入っていることを示し, そのことを用いて平均曲率ベクトル方向の単位法ベクトル場が平行であることを得て, 平均曲率ベクトル方向の形作用素の固有値に関するある等式を構成できた. その等式と等号成立条件により, $k = n$ になることが得られた. 一方, リッチの方程式をつかうことにより, ある特別な基底を用いて形作用素をよりの確に表現できた. これにより平均曲率ベクトル場が平行であることも分かる. さらにこの基底を用いることにより, Hopf ファイブレーションを使って $(2m+1)$ 次元反ドウジッター空間 $H_1^{2m+1}(-1) \subset \mathbb{C}_1^{m+1}$ のなかで, そのような部分多様体をあらわす微分方程式を構成することができる. その方程式から積分可能な $(2n+1)$ 次元分布を構成でき, その積分多様体がある m 次元複素超平面に含まれることが分かった. さらにその微分方程式を解くことにより具体的な表現を得た. そのような部分多様体は全て, $(m-1)$ 次元複素ユークリッド空間のある条件を満たす $2n$ 次元ケーラー部分多様体で表現できる.

上で得られた部分多様体は常に平行平均曲率ベクトル場をもっており, 次に我々は一般の $n_1, \dots, n_k, p$ の場合に proper ideal CR 部分多様体もそのような性質をもっているかどうか研究した. 実際, 複素双曲空間内の全ての proper ideal CR 部分多様体は平行平均曲率ベクトル場をもち, さらにそれらの部分多様体は外空間つまり複素双曲空間の測地線または円で foliate されることがわかった.

次に, 我々は複素射影空間内の proper ideal CR 部分多様体について研究し, それらはある条件のもとで余次元が還元されることがわかった. この結果を使うと 3 次元 proper ideal CR 部分多様体はすべて 2 次元複素射影空間内に含まれることがわかる.

最後に, 我々は断面曲率 ϵ をもつ実空間形内の $\delta(2)$ に関する ideal 部分多様体, つまり次の不等式の等号を満たす部分多様体を研究した.

$$(3) \quad \delta(2) \leq \frac{n^2(n-2)}{2(n-1)} H^2 + \frac{1}{2}(n+1)(n-2)\epsilon.$$

(3) の等号を満たす部分多様体はまだ完全に分類されていない. 最近, F.Dillen と L.Vrancken が 6 次元球面内のラグランジアン部分多様体で, (3) の等号を満たすものを完全に分類した. 我々は 6 次元球面内の 3 次元 proper ideal CR 部分多様体について研究した. 一般に, (3) の等号を満たす n 次元部分多様体にたいして次の接分布が定義される.

$$\mathcal{D}(p) = \{X \in T_p M^n \mid (n-1)h(X, Y) = n\langle X, Y \rangle \vec{H}, \forall Y \in T_p M^n\},$$

ここで h は第二基本形式である.

複素空間形内では $\mathcal{D}$ が全実となるような 3 次元 proper ideal CR 部分多様体の例はたくさんあるが, 我々は 6 次元球面内には $\mathcal{D}$ が全実となるような 3 次元 proper ideal CR 部分多様体は存在しないという結果を得た.

学位論文審査の要旨

主査	教授	山口	佳三
副査	教授	泉屋	周一
副査	助教授	清原	一吉
副査	講師	古畑	仁

学位論文題名

Ideal CR-submanifolds

(イデアル CR 部分多様体)

リーマン幾何学において、部分多様体の内在的な不変量（断面、リッチ、スカラー曲率等）と外在的な不変量（平均曲率等）との関係を調べることは、古くから行われてきた。最近、実または複素空間形の部分多様体に対して、Bang-Yen Chen が新しい内在的な不変量 $\delta(n_1, \dots, n_k)$ を用いて、平均曲率を含む不等式 (A)、(B) を構成した。本論文において、申請者は、複素空間形の CR 部分多様体に対する (A)、(B) の不等式において、等号を満たす部分多様体（イデアル CR 部分多様体）について研究し、4 つの場合について重要な結果を得ている。

Chen の定義したリーマン不変量はつぎで与えられる。

$$\delta(n_1, \dots, n_k)(p) = \tau(p) - \inf\{\tau(L_1) + \dots + \tau(L_k)\},$$

ここに τ はスカラー曲率、 $L_1, \dots, L_k$ は互いに直交する $T_p(M)$ の部分空間で $\dim L_j = n_j, j = 1, \dots, k$ である。概複素多様体の部分多様体上に、微分可能な正則分布でその直交補空間が全実分布であるようなものが存在するとき、その部分多様体を CR 部分多様体という。さらにその部分多様体が正則でも全実でもないとき proper とよばれる。正則断面曲率 4ϵ の m 次元複素空間形 $\tilde{M}^m(4\epsilon)$ 内の $2n$ 次元最大正則分布を持つ $(2n+p)$ 次元 CR 部分多様体に対して、Chen はつぎの不等式が成立することを示した。

$$(A) \quad \delta(n_1, \dots, n_k) \leq c(n_1, \dots, n_k)H^2 + b(n_1, \dots, n_k) + 3 \quad (\text{for } \epsilon = 1),$$

(B)

$$\delta(n_1, \dots, n_k) \leq c(n_1, \dots, n_k)H^2 - b(n_1, \dots, n_k) - 3n + \frac{3}{2} \sum_{i=1}^k n_i \quad (\text{for } \epsilon = -1).$$

ここで $b(n_1, \dots, n_k), c(n_1, \dots, n_k)$ は $n_1, \dots, n_k$ によって定まる正の定数である。また、実空間形内の $\delta(2)$ に関する ideal 部分多様体には、つぎの接分布が定義される。

$$\mathcal{D}(p) = \{X \in T_p(M^n) \mid (n-1)h(X, Y) = n(X, Y)\mathbb{H}, \forall Y \in T_p(M^n)\}$$

ここで h は第2基本形式であり、 $\mathbb{H}$ は平均曲率ベクトル場である。

申請者の得た結果はつぎのようにまとめられる。

(1) 複素射影空間内の proper ideal CR 部分多様体は、ある条件のもとで余次元が還元されることを示した。特に、3次元 proper ideal CR 部分多様体はすべて2次元複素射影空間に含まれることを示した。

(2) 複素双曲空間内の proper ideal CR 部分多様体は平行平均曲率ベクトル場を持ち、さらにそれらの部分多様体は外空間つまり複素双曲空間の測地線または円で敷き詰められる (foliate される) ことを示した。

(3) $n_1 = \dots = n_k = 2$ の場合に不等式 (B) の等号を満たす部分多様体を Hopf ファイブレーションを使って $(2m+1)$ 次元反ドジッター空間 $H_1^{2m+1}(-1) \subset \mathbb{C}_1^{m+1}$ のなかで、微分方程式を解くことにより具体的な表現を与えた。このような部分多様体は全て、 $(m-1)$ 次元複素ユークリッド空間のある条件を満たす $2n$ 次元ケーラー部分多様体で表現できることを示した。

(4) 概複素多様体 $S^6(1)$ 内には、 $\mathcal{D}$ が全実となるような3次元 proper ideal CR 部分多様体は存在しないことを示した。

(1) の最後は重要な結果であり、(3) の結果は B.Y. Chen と L.Vrancken の結果の拡張であるとともに、これにより平均曲率ベクトル場が平行であるような CR 部分多様体の新しい例を構成している。(4) は、複素空間形内では $\mathcal{D}$ が全実となるような3次元 proper ideal CR 部分多様体の例がたくさん存在することに対して、概複素多様体 $S^6(1)$ の特性を示したといえる。

この学位論文の内容は既に、Tsukuba J. Math. に一部掲載され、残部もすでに投稿され掲載が決定している。

審査員一同は、申請者が博士 (理学) の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。