

学 位 論 文 題 名

On free boundary problems
with prescribed contact angle

(境界で接触角条件を課した自由境界値問題に関する研究)

学位論文内容の要旨

近年非平衡状態では動いている多成分合金の相境界の動きを数学的に解析する研究がなされており、その相境界が、時間発展させた時にどのような形に変形していくかという事が問題になっている。本研究は、固定境界との接触角が一定であるような相境界の、時間発展させた時の動きに関して研究している。このような相境界の動きを理論的に解析する場合、その動きを記述するモデルが必要になるが、その1つとして、微分方程式によって表わすモデルがある。本研究では、相境界の動きをある偏微分方程式のモデルでとらえ、そのモデルを数学的に解析する。ここでは、以下に挙げる2つの偏微分方程式の時間発展モデルに関して研究し、時間発展させた時の相境界の動きを数学的に解析する。

1つ目のモデルは、2階の放物型偏微分方程式の初期値・境界値問題で表わされる次のようなものである。

$$\begin{cases} u_t = (a(u_x))_x, & t > 0, -\xi(t) < x < 0, \\ u_x(t, -\xi(t)) = \tan \theta_0, & u_x(t, 0) = \tan \theta_1, & t > 0, \\ u(t, -\xi(t)) = 0, & t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x), & -\xi(0) < x < 0, & \xi(0) = \xi_0. \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $a \in C^2(\mathbf{R})$ であり、 $a'(\sigma) > 0$ for $\sigma \in \mathbf{R}$ ($t = d/d\sigma$) を満たす。また、この問題において $\theta_0 \in (0, \pi/2)$, $\theta_1 \in (-\pi/2, \pi/2)$ および $\xi_0 (> 0)$ は与えられた定数で、さらに $u_0 \in C^2[-\xi_0, 0]$ は両立性の条件および $u_0(x) > 0$ ($x \in (-\xi_0, 0]$) を満たすとする。(1) は、 u と ξ を未知量とする。

$a(\sigma) = \arctan \sigma$ の時、(1) の方程式は2相を隔てる相境界がグラフ u で表わされた場合の曲率流方程式になる。曲率流方程式は、物質の2相を隔てる界面が時刻 t によって変形していく状態を考えた時、その界面の動きを記述する上で典型的な運動方程式の1つである。このとき、問題(1)は、固定境界との接触角が一定な相境界の動きを扱うモデルとしてとらえる事ができる。また、この問題が表わす別の例として、 $a(\sigma) = \sigma$ の場合がある。この場合、(1) の方程式は熱方程式になり、このとき問題(1)は、燃焼に関して扱っているモデルとしてとらえる事ができる。

本研究では、問題(1)に関して次のような結果を得た。

- (I) 問題(1)の時間局所解の存在と一意性。
- (II) $\theta_0 < \theta_1$ に対し、
 - (i) 問題(1)に対応する拡大型自己相似解の存在と一意性。
 - (ii) 問題(1)の解は、 $t \rightarrow \infty$ とした時、(i)で得た自己相似解に収束する。
- (III) $\theta_0 > \theta_1$ に対し、 $a(\sigma) = \sigma$ の場合を考える。
 - (i-a) $0 \leq \theta_1 < \theta_0$ であれば、問題(1)に対応する縮小型自己相似解が唯1つ存在する。
 - (i-b) ある臨界角 $\theta_c \in (-\pi/2, 0)$ が存在して、 $\theta_c < \theta_1 < 0$ であれば、問題(1)に対応する縮小型自己相似解が2つ存在し、 $\theta_1 = \theta_c$ であれば、唯1つ存在する。また、 $-\pi/2 < \theta_1 < \theta_c$ であれば、問題(1)に対応する縮小型自己相似解は存在しない。
 - (ii-a) (i-a)で得た自己相似解は線形安定である。
 - (ii-b) $\theta_c < \theta_1 < 0$ の場合、(i-b)で得た自己相似解は、一方は線形安定であり、他方は

不安定である。

(I)-(III) の証明に関しては、それぞれ次のようなことがポイントとなる。(I) は、解析半群の理論を用いて明らかにする。(II) の (i) と (III) の (i-a)、(i-b) については、ある変数変換によって自己相似解に関する常微分方程式の境界値問題を導き、その問題の解の存在を射撃法と呼ばれる方法を用いて明らかにする。(II) の (ii) については、(i) で得た自己相似解に $t \rightarrow \infty$ とした時収束するような、問題 (1) に対応する優解、劣解を構成し、問題 (1) の解が $t > 0$ に対して、これら優解、劣解に挟まれていることを、強最大値の原理を用いて明らかにする。(III) の (ii-a)、(ii-b) については、ある変換によってこの問題に対応する固有値問題を導き、固有値の符号を調べることによって明らかにする。

2 つ目のモデルは、表面拡散方程式によって各相境界の動きが支配されている、以下で説明する 3 相モデルである。このモデルは、H. Garcke と A. Novick-Cohen により、ある退化する動的係数をもつ Cahn-Hilliard 方程式のシステムから特異極限を用いて形式的に導かれた。このモデルは、合金における異種境界面 (interphase-boundary) の運動を記述している。

今、 $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ を有界領域とする。この Ω 内に非平衡状態の 3 つの相が存在するとし、それらの相は時間発展する 3 つの相境界 $\Gamma^i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) によって分けられているとする。さらに、それら 3 つの相境界は、片方の点は分岐点 $m(t) \in \Omega$ でつながっているとし、もう片方の点は Ω の境界 $\partial\Omega$ と交わっているとす。このとき、 $i = 1, 2, 3$ 、 $t > 0$ に対し、相境界 $\Gamma^i(t)$ 上で表面拡散方程式 $V^i = -l^i \sigma^i \kappa_s^i$ が成り立つ。ここで、 V^i は法速度、 κ^i は曲率、 s は弧長パラメータである。また、 l^i は Cahn-Hilliard 方程式のシステムの動的係数から得られる正の定数であり、 σ^i は $\Gamma^i(t)$ の表面エネルギーとして得られる正の定数である。境界条件としては、分岐点 $m(t)$ において、角度条件 $\angle(\Gamma^i(t), \Gamma^j(t)) = \theta^k$ (但し、 $(i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$)、流量の平衡に関する条件 $l^1 \sigma^1 \kappa_s^1 = l^2 \sigma^2 \kappa_s^2 = l^3 \sigma^3 \kappa_s^3$ 、および化学ポテンシャルの連続性に関する条件 $\sigma^1 \kappa^1 + \sigma^2 \kappa^2 + \sigma^3 \kappa^3 = 0$ を課し、また、 $\Gamma^i(t) \cap \partial\Omega$ において、接触角が $\pi/2$ 、および流量が 0 という条件を課す。ここで θ^i は正の定数で、 $\sigma^1 / \sin \theta^1 = \sigma^2 / \sin \theta^2 = \sigma^3 / \sin \theta^3$ なる関係 (Young's law と呼ばれている) を満たす。これに初期条件を加えたモデルにおいて $\Gamma(t) := \bigcup_{i=1}^3 \Gamma^i(t)$ と $m(t)$ が未知量である。

本論文では、 $\Gamma(t)$ がある種の対称性をもつ場合に関して、上記のモデルを研究する。つまり、各相境界 $\Gamma^i(t)$ を次のようにおき、未知量 u 、 ξ に関する問題に帰着させ、その問題を研究する。

$$\begin{cases} \Gamma^1(t) := \{(x, 0) ; -a \leq x \leq -\xi(t)\}, \\ \Gamma^2(t) := \{(x, -u(t, x)) ; -\xi(t) \leq x \leq 0\}, \\ \Gamma^3(t) := \{(x, u(t, x)) ; -\xi(t) \leq x \leq 0\}, \end{cases}$$

(但し、この場合、正の定数 a 、 b に対し、 $\Omega := (-a, 0) \times (-b, b)$ とする。) このとき、上記のモデルは $t > 0$ に対して次のようになる。

$$\begin{cases} u_t = -\partial_x \left(\frac{1}{(1+u_x^2)^{1/2}} \partial_x \left(\frac{u_{xx}}{(1+u_x^2)^{3/2}} \right) \right), & -\xi(t) < x < 0, \\ u_x(t, -\xi(t)) = \tan \theta, & u_x(t, 0) = 0, \\ \partial_x \left(\frac{u_{xx}}{(1+u_x^2)^{3/2}} \right) = 0, & x = -\xi(t), 0, \\ u(t, -\xi(t)) = 0, \\ u(0, x) = u_0(x), & -\xi(0) < x < 0, \quad \xi(0) = \xi_0. \end{cases} \quad (2)$$

(但し、 $\theta \in (0, \pi/2)$ に対して、 $\theta^1 = 2\theta$ 、 $\theta^2 = \theta^3 = \pi - \theta$ 、 $\sigma^1 = 2 \cos \theta$ 、 $\sigma^2 = \sigma^3 = 1$ 、 $l^i = 1$ ($i = 1, 2, 3$) とする。) ここで、問題 (2) は、4 階の放物型偏微分方程式の初期値・境界値問題である。

本研究では、問題 (2) に関して、次のような結果を得た。

- (I) 問題 (2) に対応するあるエネルギーを定義したとき、そのエネルギーに対する最小解の存在と一意性。
- (II) 初期値を (I) で得た最小解に (ある意味で) 十分近くとった時の、時間大域解の存在と一意性。
- (III) (II) で得た解は、 $t \rightarrow \infty$ とした時、(I) で得た最小解へ収束する。
(エネルギーの最小解の局所安定性)

(I)-(III) の証明に関しては、それぞれ次のようなことがポイントとなる。(I) については、3 相問題に付随する等周問題を解くことが証明のポイントとなる。(II) は、まず時間局所解の存在と一意性を解析半群の理論を使って明らかにする。このとき、初期データが $C^{2+\alpha}$ -曲線と与

えられた時の時間局所解の存在と一意性を得る。その後、 $C^{2+\alpha}$ -アприオリ評価を導き、時間大域解の存在と一意性を明らかにする。(III)については、エネルギーの時間に関する非増加性と各相の面積保存性を利用することがポイントとなる。

以上が本論文の要旨である。

学位論文審査の要旨

主査	教授	儀我美一
副査	教授	神保秀一
副査	教授	小澤 徹
副査	教授	上見 練太郎
副査	助教授	津田谷 公利

学位論文題名

On free boundary problems with prescribed contact angle

(境界で接触角条件を課した自由境界値問題に関する研究)

多成分合金の相境界の非平衡状態の動きを記述するために多くの偏微分方程式が考案されている。しかし、3つ以上の相が会する接合点は、それ自身の動きも自身が未知である。3相にある種の対称性がある場合、この問題を拡散方程式の自由境界問題ととらえることができる。しかし、このような単純の場合でも、その解の時間大域的挙動について未知な部分が多かった。

本論文では、第1のテーマとして熱伝導方程式を含む準線形の拡散方程式を左端が時間とともに動く区間で考え、その右端の固定端で解の微分を指定し、左端の自由端で解の値をゼロとしてその微分を指定し、区間内では解が正である自由境界問題を考えた。この問題は燃焼問題のモデルを特別な例として含む。幾何学的には解のグラフの曲線が、開き角が直角である角領域の中を、その両端が一定の接触角で境界をすべっていくことを指定している境界条件ともいえる。従来は右端の固定端で解の微分をゼロとし、左の自由端で解の微分が正と仮定した熱方程式の自由境界問題(燃焼問題)についてその解の縮み方が考察されているのみであった。本論文では、右端での微分が左端での微分より大きい場合、解は時間とともに大きくなり拡大型の自己相似解に収束することを示した。このことは全く新しい結果であり、その結果は国際的な一流学術雑誌である *Nonlinear Analysis* より出版されることが決定されている。自己相似解の存在には常微分方程式の射撃法を巧妙に用い、また優解、劣解を構成することにより自己相似解への収束を導いた。右端での微分が左端での微分よりも小さい場合は燃焼問題と同じように解が縮小していくと考えられていたが、本論文では、右端の微分が負のときは、その値がある臨界値より大きい場合には自己相似縮小解が二つあり、臨界値では1つで、それ以下では存在しないことを示した。この分岐現象は、意外であった。本論文の重要な貢献といえよう。また、二つの自己相似解の線形安定性と不安定性についても考察している。このほかにも、この自由境界問題の初期値問題の可解性を解析半群論を用いて従来知られている結果よりよい存在定理を得ている。線形安定性は自己相似解を定常解とみなせるスケール変換を行った2階常微分方程式の固有値問題を考察することによって示されている。以上のように本論文はこのテーマについて数々の解析的な新知見を与えている。

本論文の第2のテーマは、表面拡散方程式についての同様な自由境界問題の解の挙動についてである。この問題では拡散方程式が熱方程式のような2階ではなく4階であるので、比較原理が成立せず、また境界において角度条件のみならず、そこでの解のグラフの曲率がゼロであるといった2階微分についての条件を課しないと、問題として適切でない。3相問題の接合点の条件を反映した境界条件を課し、その自由境界値問題の時間局所解の一

意存在を従来知られているより特異な初期値について示した。そこでの評価を用いて定常解に近い初期値から出発した解が、時間無限遠で定常解に近づくことを示した。そのためにエネルギーの最小解の一意存在をも示している。最小解の存在問題は等周問題の拡張とみることができるので、それ自身興味深い。時間局所解の存在には解析半群論を巧妙に用いている。時間大域解の存在のために解の先験的評価をつくり、定常解への収束のために、エネルギーの非増加性と各相の面積保存性を用いた。同様の結果は表面拡散方程式による閉曲線の運動の場合既知ではあるが、その自由境界問題については、その手法を単純に拡張することはできず、各段階ごとに工夫がこらされている。このテーマについては、伊藤一男氏（現九州大学助教授）との共同研究であるが、同氏によると本論文著者の解析的計算力は著しく、その協力がなければ、この仕事をなしえなかったとのことである。

以上のように、本論文では拡散方程式の自由境界問題の解の時間大域的挙動について新たに知見を与え、またその問題の可解性についての理論を改良した。

これは応用解析特に非線形偏微分方程式論に対しての重要な寄与である。よって著者は、北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格があるものと認める。