

学 位 論 文 題 名

Natural Deductions for Substructural Logics

(部分構造論理の自然演繹での定式化)

学位論文内容の要旨

この論文の目的は、従来シーケント計算で研究が進められていた部分構造論理を自然演繹で定式化し、3つの構造推論規則の特徴付け定理を証明することである。部分構造論理とは、そのシステムの推論規則の中に構造推論規則を、一部又は全く含まない論理のことである。ここで言う構造推論規則とは G. Gentzen がシーケント計算 LK , LJ を定めたときに導入された推論規則のことで、weakening 規則、contraction 規則、exchange 規則の三種類ある。この三つのルールはそれぞれ、次のような意味を持っている。weakening 規則は、与えられた仮定から結論にいたる証明において、任意の仮定を添加しても同じ結論が証明される、という規則である。contraction 規則は、ある証明の仮定の中に同一のものが複数個ある時はそれを一つにまとめて良い、という規則である。exchange 規則は、証明の中の仮定が有る順序で並んでいるとき、隣り合った仮定同士的位置を交換することができる、という規則である。

近年、分配則や交換則など、従来の数学では当たり前と思われてきた法則の使用を制限する研究が重要になってきている。例えば、計算科学や量子力学の基礎における束論研究などである。部分構造論理は、これらの分野の論理的性質を明らかにするのに活用されている。部分構造論理の研究は、シーケント計算によって定式化されたシステムに対する研究が主であった。これは、もともと構造推論規則というものがシーケント計算の推論規則として導入され、特徴付けられていたからである。従来の自然演繹では、それが G. Gentzen で導入されて以来、構造推論規則が個別の推論規則として明確に取り出されたことはなく、構造推論規則の働きは他の論理記号の推論規則の中に埋もれてしまっていた。構造推論規則が明示されていなかった為、自然演繹での構造推論規則の研究は従来ほとんど行われていなかった。

しかし、自然演繹では、証明全体の構造の中で、仮定相互の関係、及び仮定と結論の間の依存関係が木構造として明示される。その上、自然演繹の各推論規則は、証明全体の構造を変換する操作として定義される。他方、シーケント計算においては、各推論規則は個々のシーケントに対する操作として定義される。また、直観主義論理の自然演繹システム NJ と型付きラムダ計算との間には Curry-Howard 対応と言う対応関係が有る。この Curry-Howard 対応によって NJ は構成的プログラミングや関数型プログラミングの基礎など、計算論の研究にも使われている。

部分構造論理の自然演繹による定式化、という我々の結果から、Curry-Howard 対応を部分構造論理と「部分構造化されたラムダ計算」との対応に制限することができる。この新しい対応を研究することにより、計算論のより詳細な考察をすることができるようになろう。

本論文は大きく二つの部分に分かれている。

第一部では、自然演繹における weakening 規則と contraction 規則を特徴化付ける。従来の自然演繹のシステム (NK, NJ) では、含意の導入規則が適用される際、除去される仮定の数通常区別されない。ここでは除去される仮定の数 (n) を区別して、含意の導入を三つに分ける。すなわち、 $n = 0, n = 1, n \geq 2$ の場合である。そして、weakening 規則は $n = 0$ に対応し、contraction 規則は $n \geq 2$ に対応していることを示す (定理 1 Characterization of weakening、定理 2 Characterization of contraction)。

第二部では、自然演繹における exchange 規則の特徴化付けを行う。

まず、weakening 規則、contraction 規則と exchange 規則という、構造推論規則を全く持たない自然演繹のシステムを導入する。それを NFL (Natural full Lambek) と呼ぶ。NFL の証明には、その証明を木とみなした反辞書式順序が入っている。仮定の除去を伴う推論規則の適用条件は、除去されていない仮定の中でその順序の一番小さいものを除去するときしか適用できないように、制限されている。このように推論規則の適用条件を制限することによって、NFL では exchange 規則の除去を実現している。

そして、部分構造論理のシーケント計算のシステム FL (full Lambek) と NFL が同値であることを証明する (定理 3 Equivalence of NFL and FL)。FL は weakening 規則、contraction 規則と exchange 規則という、構造推論規則を全く持たないシーケント計算のシステムで、部分構造論理や、線形論理に共通の土台を与える基本的なシステムである。FL は小野によって Cut 除去定理や健全性定理、完全性定理が証明されている。

次に、上記の適用条件の制限を無効にする推論規則を NFL に付け加える。すると、この新しいシステムでは exchange 規則が実現されている。このことは FL に exchange 規則を加えたシステムと新しいシステムが同値になることで証明される (定理 4 Characterization of exchange)。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 辻 下 徹

副 査 教 授 吉 田 知 行

副 査 教 授 津 田 一 郎

副 査 助 教 授 中 戸 川 孝 治 (北海道大学文学部哲学科)

学 位 論 文 題 名

Natural Deductions for Substructural Logics

(部分構造論理の自然演繹での定式化)

近年、数理論理学の分野において主に計算機科学からの要請で、非古典論理と総称される、古典的な推論規則を変更した論理系の研究が広範に進められている。排中律を認めない直観主義的論理は、種々の文脈で重要性が認識されており、その研究は長い歴史をもっているが、論理式の数や並び方まで情報として取り入れる部分構造論理は、長く趣味的なテーマとみなされてきた。しかし近年、計算科学において、資源の量的な面まで考慮にいられたプロセスの記述法として脚光を集めるようになり、多くの研究者が取り組み多くの研究成果を産むようになってきた。

従来、部分構造論理は従来シーケント計算と呼ばれる証明論に基づいて定式化され研究されてきた。しかし、20世紀前半に証明の別の定式化である自然演繹体系を導入されて以来、構造推論規則が個別の推論規則として明確に取り出されたことはなく、構造推論規則の働きは他の論理記号の推論規則の中に埋もれてしまっていた。構造推論規則が明示されていなかった為、自然演繹での構造推論規則の研究は従来ほとんど行われていなかった。

その理由は、推論過程における証明図の変化が局所的であるシーケント計算体系と比べた場合、素朴な証明過程を直に形式化した自然演繹体系では、推論過程において含意導

入・除去規則適用時に証明図の全体的構造が変化するため、推論過程の分析が容易ではないためである。

申請論文は、自然演繹体系において、構造規則がどのように表現されるかを吟味し次の結果を得た。

(1) 自然演繹における弱化規則と縮約規則とを定式化し、新しい推論規則による自然演繹体系における証明可能性と、シークエント計算体系から弱化規則と縮約規則とを除外した体系における証明可能性とが一致する。

(2) NFL と呼ぶ自然演繹体系を導入し、その証明可能概念と、FL と呼ばれるシークエント計算体系の証明可能概念とが一致する。

(3) NFL についての 4 つの含意に関する導入・除去規則を定式化し、証明可能性に関しては、これらのうちいずれか一つを NFL に添加することと、FL に可換規則を追加することと同じ効果を持つことを示した。

これを要するに、本論文は、従来専らシークエント計算体系に基づいて展開されてきた部分構造論理の研究を、自然演繹体系に基づいて展開する端緒を開くものといえることができ、非古典論理の分野に対する、貢献する所大なるものがある。

よって著者は、北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格あるものと認める。