

学 位 論 文 題 名

Generalized Verma modules induced
from characters of parabolic subalgebras
with commutative nilpotent radical

（可換な巾零根基をもつ放物型部分代数の指標から
誘導された一般化されたバーマ加群）

学位論文内容の要旨

G を複素単純リー群, $\mathfrak{g}$ をそのリー代数, $\mathfrak{h}$ をカルタン部分代数, $\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{h}$ を含む放物型部分代数, $\mathfrak{n}^+$ を $\mathfrak{p}$ の巾零根基, $\mathfrak{l}$ を $\mathfrak{p}$ のレビ部分代数, L を G の部分群で $\mathfrak{l}$ に対応するものとする.

今までに, $\mathfrak{p}$ の指標 λ から誘導された, 一般化されたヴァーマ加群 $M(\lambda)$ について研究を行ない, $\mathfrak{n}^+$ が可換な場合にいくつかの結果が得られた. $\mathfrak{n}^+$ が可換であるので $M(\lambda)$ は $\mathbf{C}[\mathfrak{n}^+]$ と, ベクトル空間として同型であり, $\mathbf{C}[\mathfrak{n}^+]$ が $\mathfrak{g}$ -加群となる. 以下 $M(\lambda)$ と $\mathbf{C}[\mathfrak{n}^+]$ を同一視する.

$(L, \text{Ad}, \mathfrak{n}^+)$ は概均質ベクトル空間になるが, 以下簡単のため, $(L, \mathfrak{n}^+)$ が正則であるときについて説明をする. なお, 正則でない場合の議論も, 正則である場合に帰着される. $(L, \mathfrak{n}^+)$ が正則のときは, $\mathbf{C}[\mathfrak{n}^+]$ に L の作用で定数倍されるような多項式 (相対不変式) があり, それを用いて, 各 L -最高ウェイトベクトルに対して, その $\mathfrak{b}$ -関数が明示的に定義できる.

$M(\lambda)$ には反変形式と呼ばれる, ある意味で $\mathfrak{g}$ 不変な対称双 1 次形式が自然に入る. そして, 反変形式の行列式が $\mathfrak{b}$ -関数の積でかけることが, 直接的な計算により観察されるが, この論文では主定理の系として, この事実を本質的に導いた. つまり, なぜ, $\mathfrak{b}$ -関数の積となるかを本質的に明らかにした. 反変形式は, 最高ウェイト加群の既約性やユニタリ化可能性をコントロールしているため, 反変形式と $\mathfrak{b}$ -関数の間に本質的なつながりがあることは, $\mathfrak{b}$ -関数と加群の構造の間に本質的なつながりがあることを示しており重要である.

この結果の応用として, まず, 菅氏 (1991), 行者氏 (1993, 1994) による $M(\lambda)$ の既約性と $\mathfrak{b}$ -関数の関係を, 可換巾零根基型の時に, 本質的に説明できる. 行者氏は, より一般の一般化されたヴァーマ加群について, ある仮定のもとで, 必要十分条件を示しており, この応用は, 可換巾零根基型の時に, この仮定なしで行者氏の結果を導いたものといえる.

次に $\mathfrak{n}^+$ 上の L -軌道分解と $\mathfrak{b}$ -関数の零点の対応について, 本質的な証明を与えることが出来る. $\mathfrak{n}^+$ 上の L -軌道の定義イデアルがいつ極大部分加群になるかを考えるこ

とにより、対応が付くが、反変形式は $M(\lambda)$ の極大部分加群の構造を記述してもいるので、この対応付けの本質的な証明が出来る。この対応は、谷崎氏が証明したが (1998)、単なる一致ではない本質的な説明が待たれていた。

3つ目の応用として、 $M(\lambda)$ の既約商加群のユニタリ化可能性と b -関数の関わりも、本質的に説明できる。これは、Enright-Howe-Wallach (1983) による分類をはじめ、多くの文献において研究されている事実であるが、本質的な説明は初めてではないかと思われる。

これら3つの応用はそれが本質的な証明であるという点が新しい。さらに主定理自体も、一般化されたヴァーマ加群の構造に b -関数が内在することを示していて重要である。

最後に $(L, \text{Ad}, \mathfrak{n}^+)$ には、Howe-Umeda (1991) によりカペリ恒等式が存在するが、 $M(\lambda)$ 上にその類似物が構成できる。カペリ恒等式は、 $\mathfrak{l}$ の表現と両立しているといえるが、 $M(\lambda)$ 上の類似は、 $\mathfrak{g}$ の表現と両立しているといえる。このことは、カペリ恒等式の応用面で重要である。

学位論文審査の要旨

主査	教授	諏訪立雄
副査	教授	山口佳三
副査	助教授	山田裕史
副査	助教授	齋藤睦

学位論文題名

Generalized Verma modules induced from characters of parabolic subalgebras with commutative nilpotent radical

(可換な巾零根基をもつ放物型部分代数の指標から
誘導された一般化されたバーマ加群)

半単純リー環の表現論において、(一般化された)バーマ加群は重要な対象であり、1960年代末に定義されて以来幾多の数学者が研究してきた。なかでも(一般化された)バーマ加群の既約性を判定することは一つの中心的话题である。

さて、本論文の表題にある可換な巾零根基をもつ放物型部分代数の指標から誘導された一般化されたバーマ加群については、その既約性と相対不変式の b -関数の零点とは関係があることが知られていた。また関連して、既約剰余加群のユニタリー化可能性や可換な巾零根基上の放物型部分群のレビ部分群による軌道も b -関数の零点と関係があることが知られていた。しかし、 b -関数自身との本質的關係は、既約性についてはある条件のもとで行者明彦氏の結果があるものの、他の事柄については知られていない状態にあり、その本質的説明が待たれていた。本論文において著者はその解答を与えている。

本論文は大きく分けて二つの部分からなっているが、第一の部分では、上記の一般化されたバーマ加群上の反変形式と b -関数との関係を明らかにし、その応用として上に述べた三つの事柄について b -関数自身との関係を証明し、 b -関数の零点だけではなく、 b -関数自身が現れ、鍵となる役割を果たすことを説明した。著者のこの結果は無条件に成立し、行者氏の仕事で仮定されていた条件を取り払うことにも成功した。

また、第二の部分で著者はカペリ恒等式の類似を証明している。この恒等式は上記の一般化されたバーマ加群上の反変形式と b -関数との関係を一行で表した式と言っても過言ではない程の重要な式である。著者が求めたこのカペリ恒等式の類似は、古典的なカペリ恒等式より対称性が良く、半単純リー環の表現論やリー群の作用を持つ微分方程式系での応用が期待される。

要するに、著者は上記の一般化されたバーマ加群の構造において b -関数が深く関与していることを明示することに成功した。これは半単純リー環の表現論において大変

重要な結果である。
よって著者は、北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格あるものと認める。