

学 位 論 文 題 名

Complete affine flows with nilpotent holonomy group

(冪零ホロノミー群をもつ完備アフィン流)

学位論文内容の要旨

アフィン流のように葉層構造として横断的に幾何構造をもつ力学系は、様々な幾何構造に対して研究がなされ、横断的に双曲構造をもつ力学系や、相似構造をもつ力学系はそれぞれある条件のもとで分類もされている。本論文で取り上げる横断的に一般のアフィン構造をもつ力学系については、ほとんど何も知られていなかったが、近年、完備という条件のもとで 3 次元多様体上で分類がなされたことにより、より一般の次元の多様体上でも完備という条件のもとで分類をすることが問題となった。

横断的に G 構造をもつ葉層構造は、多様体の G 構造と同様に展開写像 D とホロノミー準同型写像 h によって定義される。つまり、 $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$ を $n+1$ 次元多様体 M の普遍被覆空間とすると、 M 上のアフィン流は葉層構造として次を満たす沈め込み $D: \tilde{M} \rightarrow R^n$ によって、その葉が D による一点の逆像の連結成分を被覆写像 π によって射影したものと定義される：

(*) 準同型写像 $h: \pi_1(M) \rightarrow \text{Aff}(n)$ が存在し任意の $x \in \tilde{M}$ に対して $D(\gamma x) = h(\gamma)D(x)$.

ただし γ は $\tilde{M}$ への基本群の作用であり、 $\text{Aff}(n)$ は R^n のアフィン変換群をあらわす。

アフィン流が完備であるとは、展開写像がファイバーバンドルの射影となっているときをいう。

この種の力学系を分類する一つの方法に、同じホロノミー群をもつ代数的なモデルを構成し、それが与えられた力学系と共役となることを示す方法がある。代数的なモデルとは、Lie 群 G の 1 径数部分群の作用によって誘導される G の一様格子 Γ による商多様体 $\Gamma \backslash G$ 上の力学系のことをいう。代数的なモデルに共役な力学系を代数的な力学系といい、有限被覆上に持ち上げた力学系が代数的であるとき準代数的という。本論文では、多様体の基

本群が可解であるという条件のもとで、完備アフィン流が準代数的であるか否かを考察し、冪零ホロノミー群をもつ完備アフィン流は準代数的であることを証明した。

与えられた $n+1$ 次元多様体上の可解ホロノミー群をもつ完備アフィン流に対して、同じホロノミー群をもつ代数的モデルを構成するには、まず適当な Lie 群を探さなければならない。そのために、与えられた可解線形群に対し、その群を含み、同じ代数閉包をもち、連結成分が有限個である閉可解線形群 “syndetic hull” を用いる。

アフィン変換群 $\text{Aff}(n)$ は自然に次元が 1 つ上の一般線形群の部分群とみなせるので、完備アフィン流のホロノミー群は可解ならば syndetic hull が存在する。一般にホロノミー群は離散群とはならないのでその作用を調べることは困難であるが、その syndetic hull がホロノミー群が作用する空間である $\mathbf{R}^n$ に推移的に作用することが示されるため、syndetic hull を用いることによりホロノミー群の作用を適切な Lie 群とその部分群の作用としてとらえることが可能となる。特に、syndetic hull の半直積構造から、多様体にファイバーバンドルの構造が導かれ、力学系はそのファイバーに沿うかあるいは横断的になることがわかる。また、syndetic hull が単連結の場合にはその次元が n かあるいは $n+1$ であることが示されることによって、syndetic hull は代数的モデルを構成するための Lie 群の候補となる。

完備アフィン流で、必要ならば有限被覆上に持ち上げて、syndetic hull が単連結となる冪零ホロノミー群をもつものについては、syndetic hull を用いて実際に同じホロノミー群をもつ代数的な完備アフィン流を構成することができるのであるが、さらにこの二つの完備アフィン流が共役となることを示すことによって、冪零ホロノミー群をもつ完備アフィン流は準代数的であることがわかる。

最後に、冪零ホロノミー群の代数閉包の分解を用いて、その $\mathbf{R}^n$ への作用を調べることによって、ホロノミー群の syndetic hull が単連結になることが示され、主定理が証明される。

主定理 完備アフィン流はホロノミー準同型写像が単射でホロノミー群が冪零であるなら準代数的である。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 西 森 敏 之

副 査 教 授 諏 訪 立 雄

副 査 教 授 泉 屋 周 一

副 査 教 授 小 野 薫

学 位 論 文 題 名

Complete affine flows with nilpotent holonomy group

(冪零ホロノミー群をもつ完備アフィン流)

近年、葉層構造論では実例を詳しく調べるということが重視され、様々な横断的幾何構造をもつ力学系を研究するという分野の発展が期待されている。双曲構造や相似構造の場合にはある条件のもとで分類が得られたが、アフィン構造の場合には、ほとんど何も知られていないという状況である。

本論文は、横断的アフィン構造をもつ力学系について、最近 3 次元多様体上で完備という条件のもとで分類がなされたことに触発されて、一般次元の多様体上で完備という条件のもとで研究することにより、葉層構造論に対する有益な知見を得ることを目的としている。もはや 3 次元の特殊性を使えないので、新たな方法が開発されている。

横断的に G 構造をもつ葉層構造は、多様体の G 構造と同様に展開写像 $\mathcal{D}$ とホロノミー準同型写像 h によって定義される。つまり、 $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$ を $n+1$ 次元多様体 M の普遍被覆空間とすると、 M 上のアフィン流は葉層構造として次を満たす沈め込み $\mathcal{D}: \tilde{M} \rightarrow \mathbf{R}^n$ によって、その葉が $\mathcal{D}$ による一点の逆像の連結成分を被覆写像 π によって射影したものと定義される：

(*) 準同型写像 $h: \pi_1(M) \rightarrow \text{Aff}(n)$ が存在し任意の $x \in \tilde{M}$ に対して $\mathcal{D}(\gamma x) = h(\gamma)\mathcal{D}(x)$. ただし γ は $\tilde{M}$ への基本群の作用であり、 $\text{Aff}(n)$ は $\mathbf{R}^n$ のアフィン変換群をあらわす。

アフィン流が完備であるとは、展開写像がファイバーバンドルの射影となっているときをいう。

横断的な幾何構造をもつことはその力学系の構造に強い制限を与え、同じホロノミー群をもつ代数的なモデルと共役となることが期待される。代数的なモデルとは、Lie 群 G の 1 径数部分群の作用によって誘導される G の一様格子 Γ による商多様体 $\Gamma \backslash G$ 上の力

学系のことをいう。代数的なモデルに共役な力学系を代数的な力学系といい、有限被覆上に持ち上げた力学系が代数的であるとき準代数的という。本論文では、多様体の基本群が可解であるという条件のもとで、完備アフィン流が準代数的であるか否かを考察し、冪零ホロノミー群をもつ完備アフィン流は準代数的であることを証明した。

与えられた $n+1$ 次元多様体上の可解ホロノミー群をもつ完備アフィン流に対して、同じホロノミー群をもつ代数的モデルを構成するには、まず適当な Lie 群を探さなければならない。そのためにシンデティック・ハルと呼ばれる群の構成が応用される。これは与えられた可解線形群に対し、その群を含み、同じ代数閉包をもち、連結成分が有限個である閉可解線形群である。

完備アフィン流のホロノミー群が可解ならば、そのホロノミー群にはシンデティック・ハルが存在することがわかる。一般にホロノミー群は離散群とはならないのでその作用を調べることは困難であるが、そのシンデティック・ハルがホロノミー群が作用する空間である R^n に推移的に作用することが示されるため、ホロノミー群の作用を適切な Lie 群とその部分群の作用としてとらえることが可能となる。特に、シンデティック・ハルの半直積構造から、多様体にファイバーバンドルの構造が導かれ、力学系はそのファイバーに沿うかあるいは横断的になることがわかる。また、シンデティック・ハルが単連結の場合には、その次元が n かあるいは $n+1$ となり、代数的モデルを構成するための Lie 群の候補となる。

完備アフィン流で、必要ならば有限被覆上に持ち上げて、シンデティック・ハルが単連結となる冪零ホロノミー群をもつものについては、実際に同じホロノミー群をもつ代数的な完備アフィン流を構成することができるのであるが、さらにこの二つの完備アフィン流が共役となることを示すことによって、冪零ホロノミー群をもつ完備アフィン流は準代数的であることがわかる。

最後に、冪零ホロノミー群の代数閉包の分解を用いて、その R^n への作用を調べることによって、ホロノミー群のシンデティック・ハルが単連結になることが示され、次の主定理が証明される。

主定理 完備アフィン流はホロノミー準同型写像が単射でホロノミー群が冪零であるなら準代数的である。

これを要するに、著者は完備アフィン流についてある条件のもとにその構造について新知見を得たものであり、葉層構造論に対して貢献するところ大なるものがある。

よって著者は、北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格あるものと認める。