

学 位 論 文 題 名

Generic differential geometry on curves and
surfaces in Minkowski 3-space

(3次元ミンコフスキー空間内の曲線及び曲面の生成的微分幾何学)

学位論文内容の要旨

本論文では、特異点論を応用して、3次元ミンコフスキー空間内の曲線や曲面のローレンツ不変量を研究した。

本論文は、二つの部分からなる。第一部は、3次元ミンコフスキー空間内の曲線に関する研究である。空間的曲線について、ユークリッドの場合との本質的な違いは光錐の存在である。そこで、光錐的ガウス写像、光錐的双対曲線と光錐的可展開面などの概念を導入し、それらの特異点とローレンツ群の作用に対する幾何不変量の関係を研究した。

$\mathbb{R}_1^3$ を3次元ミンコフスキー空間とする。この空間は $\mathbb{R}^3$ 上に擬内積 $\langle x, y \rangle = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ を考えたものである。このとき、ベクトル x が $\langle x, x \rangle > 0$ を満たすとき空間的、 $\langle x, x \rangle < 0$ を満たすとき時間的、 $\langle x, x \rangle = 0$ を満たすとき光的であると言う。また、 $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}_1^3$ に対して擬外積を $x \wedge y = (-(x_2y_3 - x_3y_2), x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$ で定める。

$\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ を正則曲線とする。曲線 γ が空間的曲線であるとはその接ベクトルが空間的であることとする。又、ベクトル x のノルムを $\|x\| = \sqrt{|\langle x, x \rangle|}$ で定める。さらに、空間的曲線に対してはユークリッド空間の場合と同様に弧長 s によるパラメーター付けがいつでも可能で、この場合もやはり $\|\gamma'(s)\| = 1$ である。このとき、 $t(s) = \gamma'(s)$ とおき、単位接ベクトル、 $k(s) = \sqrt{|\langle \gamma''(s), \gamma''(s) \rangle|}$ を曲率、 $k(s) \neq 0$ のとき $\gamma''(s) = k(s) \cdot n(s)$ で決まる $n(s)$ を単位主法線ベクトルと呼び、 $b(s) = t(s) \wedge n(s)$ を単位従法線ベクトルと呼ぶ。さらに、以下のFrenet-Serret型の公式が成り立つ: $t'(s) = k(s) \cdot n(s)$, $n'(s) = -\delta(\gamma(s)) \cdot k(s) \cdot t(s) + \tau(s) \cdot b(s)$, $b'(s) = \tau(s) \cdot n(s)$ 。ここで $\tau(s)$ は捩率を表し、 $\delta(\gamma(s))$ はベクトル $n(s)$ の符号で、空間的なとき1、光的なとき0、さらに時間的なとき-1と定める。しかし、この公式は $k(s) = 0$ なる点では成り立たないので、 $N(s) = \gamma''(s)$ と $B(s) = t(s) \wedge N(s)$ を考え、 $N(s)$ を単に主法線ベクトル、 $B(s)$ を従法線ベクトルと呼ぶ。又、ベクトル $N(s) \pm B(s)$ はいつも光的ベクトルであることがわかる。さらに、 $k(s) = 0$ のときベクトル $N(s) \pm B(s)$ は $N(s)$ に平行である。そこで、光錐の高さ関数 $H: I \times S_+^1 \rightarrow \mathbb{R}$; $H(s, v) = \langle \gamma, v \rangle$ というローレンツ不変な関数の特異点と $H(s, v)$ の1パラメーター開折としての判別集合を考えることにより、光錐的ガウス写像 $LG_\gamma^+: I \rightarrow S_+^1$; $LG_\gamma^+(s) = N(s) + B(s)$ と光錐的双対曲線 $LP_\gamma^+: I \rightarrow C_0^*$; $LP_\gamma^+(s) = \langle \gamma(s), N(s) + B(s) \rangle \cdot (N(s) + B(s))$ という写像が定義される。ここで、 $S_+^1 = \{x \in \mathbb{R}_1^3 | x = (+1, x_2, x_3), x_2^2 + x_3^2 = 1\}$, $C_p^* = \{x \in \mathbb{R}_1^3 | \langle x - p, x - p \rangle = 0, p \in \mathbb{R}_1^3\} - \{p\}$ である。さらに、特異点理論の一般論を用いることにより、ジェネリックな空間的曲線 γ に対して、光錐的ガウス写像と光錐的双対曲線はそれぞれある点で折り目点とカスプ点を持つ必要十分条件はこの点で γ の曲率がゼロであることがわかる。この曲率関数は光錐の高さ関数の特異点を研究する際導いたローレンツ不変量で、以下の幾何学的意味を持つ。 γ は空間的曲線で $\gamma''(s) \neq 0$ を満たすものとする。このとき、 $k(s) \equiv 0$ である必要十分条件は γ'' が原点を頂点とする光錐 C_0^* 上の曲線である。また、ローレンツ距離2乗関数 $G: I \times \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}$;

$G(s, v) = \langle \gamma - v, \gamma - v \rangle$ という不変関数の判別式を考えることにより、光錐的可展開面 $LD^+_1: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3_1$; $LD^+_1(s, u) = \gamma(s) + u(n(s) + b(s))$ という写像も考えられる。実際ジエネリックな空間的曲線 γ に対して、この曲面の特異点はカスプの軌跡とツバメの尾であることがわかる。そしてツバメの尾に対応する曲線 γ 上の点は $(k' \mp \tau k)(s) = 0$ を満たす。この不変量はローレンツ距離 2 乗関数の特異点を研究する際導いたもので、以下の幾何学的意味を持つ。 γ は空間的曲線 $k(s) \neq 0$ を満たすものとする。このとき、 $(k' - \tau k)(s) \equiv 0$ である必要十分条件は $p_{\pm} = \gamma(s) + \frac{1}{k(s)\delta(\gamma)}(n(s) \pm b(s))$ が定ベクトルであることである。このとき、 γ が p を頂点とする光錐 $C^*_{P_{\pm}}$ 上の曲線である。また、非光的曲線に対して、従法線標形や焦可展開面などの概念を導入すれば、ユークリッド微分幾何で得られた事実のアナロジーが出来る。ただし、ユークリッドの場合との違いは接触球を考える代わりに接触擬球や接触双曲面を考えることである。

第二部では、 $\mathbb{R}^3_1$ 内へはめ込まれた閉曲面のガウス写像の特異点の分類及び安定性について研究した。古典的には 3 次元ユークリッド空間内の向き付けられた曲面に対しては、各点における単位法ベクトルに対応される写像がガウス写像であり、その値を単位球面上に取る。しかし、 $\mathbb{R}^3_1$ 内では、空間的ベクトル、時間的ベクトル、光的ベクトルの 3 種類のベクトルが存在し、特に光的ベクトルはノルムがゼロとなる。従って、曲面の擬法ベクトルが光的のとき、その方向の長さ 1 のベクトルは考えることができない。このため、ユークリッド的ガウス写像に類似の概念は、曲面の擬法ベクトルが光的以外の所でのみ定義される。一方、曲面上には常にミンコフスキーの距離に依存した擬法ベクトルが定まる。ここでは、上記の困難を避けるため、値を射影平面に取るガウス写像を考える。

a, n をそれぞれ $\mathbb{R}^3_1$ の点とベクトルとする。このとき、 $\langle n, x - a \rangle = 0$ を点 a を通り、ベクトル n をこの平面の擬法線ベクトルとする平面の方程式と呼ぶ。ここで、 x は平面上の点である。又、 n は空間的、光的、時間的であるとき、この平面をそれぞれ時間的平面である、光的平面である、及び空間的平面であると呼ぶ。

今、 M をコンパクト 2 次元多様体とし、 $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3_1$ をはめ込みとする。このとき写像 $N(f): M \rightarrow \mathbb{RP}^2$; $x \mapsto \langle X_u(x) \wedge X_v(x) \rangle_{\mathbb{R}}$ を M 上の f に同伴する射影平面値ガウス写像という。ここで、 $X = X(u, v)$ は $f(M)$ の局所パラメーター表示である。即ち、 $N(f)(x)$ は $x \in f(M)$ における接平面 $T_{f(x)}f(M)$ の擬法線方向である。さらに、 $f(M)$ における擬法線方向に依存して M は以下のように 3 種類の部分集合へ分割される。 $M_s^f = \{x \in M | X_u(x) \wedge X_v(x) : \text{時間的}\}$, $M_l^f = \{x \in M | X_u(x) \wedge X_v(x) : \text{光的}\}$, $M_t^f = \{x \in M | X_u(x) \wedge X_v(x) : \text{空間的}\}$ 。ここで、 M_s^f を空間的部分、 M_l^f を光的部分、 M_t^f を時間的部分と呼ぶ。 $I(M, \mathbb{R}^3_1) := \{f | f: M \rightarrow \mathbb{R}^3_1 : \text{はめ込み}\}$ とおき、 $I(M, \mathbb{R}^3_1)$ には C^∞ -topology を考える。又、 $f \in I(M, \mathbb{R}^3_1)$ に対して、その射影平面値ガウス写像 $N(f)$ の特異集合を f の放物型集合と呼ぶ。このとき、第二部では以下の主な結果を得た。

定理. 稠密部分集合 $O \subset I(M, \mathbb{R}^3_1)$ が存在して、任意の $f \in O$ に対して以下が成り立つ。

- (1) f の放物型集合は正則である (放物的軌跡と呼ぶ)。
- (2) f の放物的軌跡において、有限個の点はカスプ点であり、それ以外のすべての点は折り目点である。
- (3) f の光的点の全体は正則曲線である (光的軌跡と呼ぶ)。
- (4) f の放物的軌跡と光的軌跡は横断的に交わり、その交点は射影平面値ガウス写像の折り目点である。
- (5) f の光的軌跡において、接線は光的である点からなる集合は孤立点の集合となる。
- (6) f の放物的軌跡において、接線は光的である点からなる集合は孤立点の集合となる。

以上。

学位論文審査の要旨

主査	教授	泉屋周一
副査	教授	諏訪立雄
副査	教授	山口佳三
副査	教授	小野薫
副査	助教授	石川剛郎

学位論文題名

Generic differential geometry on curves and surfaces in Minkowski 3-space

(3次元ミンコフスキー空間内の曲線及び曲面の生成的微分幾何学)

本論文では、特異点論を応用して、3次元ミンコフスキー空間内の曲線や曲面のローレンツ不変量を研究している。

第一部では、3次元ミンコフスキー空間内の曲線に関する研究を行い、空間的曲線について、ユークリッドの場合との本質的な違いである光錐の存在に着目し、光錐のガウス写像、光錐的双対曲線と光錐的可展開面などの概念を導入し、それらの特異点とローレンツ群の作用に対する幾何不変量の関係を研究している。

$\mathbb{R}_1^3$ を3次元ミンコフスキー空間とする。この空間は $\mathbb{R}^3$ 上に擬内積 $\langle x, y \rangle = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ を考えたものである。このとき、ベクトル x が $\langle x, x \rangle > 0$ を満たすとき空間的、 x が $\langle x, x \rangle < 0$ を満たすとき時間的、 $\langle x, x \rangle = 0$ を満たすとき光的であると言う。この光的ベクトルの存在がユークリッド幾何学との本質的差であり困難性でもある。本論文では、幾何学的直感ではとらえにくいこれらの概念にたいして、光錐の高さ関数とローレンツ距離2乗関数と言う関数を新たに定義しそれに特異点論を適用することにより幾何不変量の性質の研究を行っている。これらの関数の特異点論の応用は従来の研究には見られないまったく独創的なものである。

第二部では、ミンコフスキー空間内へはめ込まれた閉曲面のガウス写像の特異点の分類及び安定性について研究している。古典的には3次元ユークリッド空間内の向き付けられた曲面に対しては、各点における単位法ベクトルを対応される写像がガウス写像であり、その値を単位球面上に取る。しかし、ミンコフスキー空間内では、空間的ベクトル、時間的ベクトル、光的ベクトルの3種類のベクトルが存在し、特に光的ベクトルはノルムがゼロとなる。従って、曲面の擬法ベクトルが光的のとき、その方向の長さ1のベクトルは考えることができない。このため、ユークリッド的ガウス写像に類似の概念は、曲面の擬法ベクトルが光的以外の所でのみ定義される。一方、曲面上には常にミンコフスキーの距離に依存した擬法ベクトルが定まる。ここでは、これらの困難を避けるため、値を射影平面に取るガウス写像を考えその特異点と曲面の幾何不変量の関係、ガウス写像の安定性等について研究している。この場合も、光的ベクトルが存在する為の困難をガウス写像の定義を変えることにより回避するという独創的アイデアを用い曲面の幾何不変量を研究しており、このアイデアは高次元の場合にも当然拡張されると思われる、今後の発展が多いに期待できる。

これを要するに、著者は特異点論の応用としてのミンコフスキー空間内の曲線及び曲面のローレンツ微分幾何に関して新知見を得たものであり、微分幾何学及び特異点論に貢献すること大なるものがある。

よって著者は、北海道大学博士(理学)の学位を授与される資格あるものと認める。