

学 位 論 文 題 名

$H^s$  theory for wave equations

(波動方程式の  $H^s$  理論)

学位論文内容の要旨

近年、非線型偏微分方程式の初期値問題を、分数冪の微分可能性  $s$  を持つソボレフ空間  $H^s$  の枠組みで解くことが問題となっており、 $H^s$  理論と呼ばれて研究されている。本研究は、非線型波動方程式に対する  $H^s$  理論の構築を目指したもので、Part 1 では  $H^s$  理論の構築の上で基礎となる線型評価について研究し、Part 2 では 1995 年に J.Ginibre と G.Velo によって示された線型評価をもとに非線型波動方程式の  $H^s$  理論を研究している。

本研究では、次の非線型波動方程式の初期値問題を考える。

$$(nlw) \quad \partial_t^2 u(t, x) - \sum_{j=1}^n \partial^2 u(t, x) / \partial x_j^2 = f(u(t, x)),$$

ここで、 $i = \sqrt{-1}$ ,  $(t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$  とし、 $f$  は  $\mathbf{C} \simeq \mathbf{R}^2$  上の複素数値関数、 $u$  は  $\mathbf{R}^{n+1}$  上の複素数値関数とする。

$H^s$  理論は、初期値問題を次で定義される斉次または非斉次のソボレフ空間の枠組みで解くことを目的とする。

$$\dot{H}^{s,r} \equiv (-\Delta)^{-s/2} L^r(\mathbf{R}^n), \quad H^{s,r} \equiv (1 - \Delta)^{-s/2} L^r(\mathbf{R}^n).$$

特に、対象とする偏微分方程式の初期値を上的空間から与えた場合、その方程式の解が存在するための条件を初期値の微分可能性  $s$  の条件に反映させて、解の存在条件を明確にすることが出来ることが大きな特徴である。

本研究で考えられる限りでは、(nlw) に対するこの理論での主要な評価は Strichartz 評価と呼ばれる線型評価と非線型項  $f(u)$  に対する評価となる。これら二つの評価を組み合わせ、標準的な縮小写像の原理を応用することにより、与えられた初期値に対し一意的な解を構成することが出来る。非線型項に対する評価は、どのような非線型項を考えるかによって評価の方法が異なるのに対し、線型評価は非線型項の特質によらず、普遍な評価となる。

Part 1 (Proposition 2.2 参照) では、J.Ginibre と G.Velo が 1995 年に与えた評価を包含する新しい線型評価を示す。J.Ginibre と G.Velo によって与えられた評価は、当時の時点で知られていた線型評価をほぼ包含する評価であったが、J.-G.Bak, D.McMichael, D.Oberlin, J.Harmse 等によって既に得られていた線型評価とは独立のものであった。本研究で

は、これらの評価をも結果として包含する新しい評価を示す。

Part 2 (Theorem 1.1 参照) では、局所相互作用を表す非線型項  $f(u) \sim |u|^p$  ( $1 < p < \infty$ ) に対し、(nlw) の斉次ソボレフ空間  $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$  ( $0 \leq s < n/2$ ) における解を構成するとともに、初期値問題の適切性を示す。この問題に関しては、 $s$  が 1 または 2 の時にはそれぞれエネルギー解、強解として膨大な量の研究がある。近年、Besov 空間を用いた  $s$  が分数冪の場合の非線型項に対する評価が開発され、分数冪の  $s$  における  $H^s$  理論の研究が活発となった。本研究では、 $s$  が十分小さな場合を除いて、初期値問題の適切性が示せる最善の結果を出している。

最後に、本研究は波動方程式を扱ったものではあるが、基本解の特性からシュレディンガー方程式に対しても類似の結果を得る。これらの結果は、指導教官である小澤氏との共同研究にまとめられているが、本研究の位置づけを明確にするものなので、学位論文の Introduction において一連の結果を紹介する。

# 学位論文審査の要旨

主 査 教 授 小 澤 徹

副 査 教 授 久保田 幸 次

副 査 教 授 上 見 練太郎

副 査 教 授 儀 我 美 一

学 位 論 文 題 名

$H^s$  theory for wave equations

(波動方程式の  $H^s$  理論)

本論文では  $1+n$  次元時空に於ける複素スカラー場の満たす非線型波動方程式

$$\partial_t^2 u - \Delta u = f(u)$$

の初期値問題に就いて時間大域解の存在、および付随する散乱理論を論ずる。ここで  $\Delta$  は  $n$  次元空間  $\mathbb{R}^n$  上のラプラシアン、 $f$  は非線型項を与える複素函数とする。高次元の場合も含め統一的に扱う為ここでは  $n = 1$  を除外して考え  $n \geq 2$  とする。また、所謂「小さな解」を考える為  $f$  は原点の近傍で  $p$  乗冪の如く振る舞うものと仮定する。初期値は  $s$  次のエネルギー空間から

$(u(0), \partial_t u(0)) \in \dot{H}^s \oplus \dot{H}^{s-1}$  と取って与える。ここで  $\dot{H}^s$  は  $\mathbb{R}^n$  上の  $s$  次の斉次ソボレフ空間である。近年 Lindblad と Sogge により「小さな解の大域存在」の理論が急速に発展し注目される様になったが、この理論の特徴は上記  $n, p, s$  の三者間の臨界等式により十分条件が与えられるというものである。但し、 $s$  としては比較的小さいという制限が付くことと  $p$  と  $s$  との付帯条件もやや技術的でありこれらが本質的理解を難しくする欠点があった。著者は斉次ベゾフ空間に於ける非線型項の評価を最良の形で与え、それを Ginibre と Velo の線型評価と適切に組合せることで、臨界等式を極めて見易い最良の条件で提示しそれが「小さな解の大域存在」を保障することを証明した。その理論の基本的枠組は非斉次ソボレフ空間  $H^s$  で与えられるのでこれを著者は  $H^s$  理論と呼んでいる。これが本論文の Part I である。

さて上記線型評価とは所謂 Strichartz 型評価である。これは Fourier 変換の超曲面上への制限の有界性と同値であることから調和解析学の中でも一つの重要なテーマである。一方非線型発展方程式への応用という観点からも重要性が格段に増加している。実際その一般化は上記二分野で独自の発展を遂げるに至っている。しかし、不幸なことにその共通部分は丁度 Strichartz が与えたものしかないという方向性の全く異なる状態であった。著者はこれら二つの流れを統一的な立場から捉えるという課題に取組みほぼ満足な理論を構築した。その結果従来知られていた Strichartz 型評価が極めて広い設定で成立することが証明され将来の応用が期待されている。これが本論文の Part II である。

以上の研究により波動方程式を線型及び非線型両者の立場から新しい見地を与えることに成功し、この分野の発展に大きく貢献した。よって著者は北海道大学博士(理学)の学位を授与される資格あるものと認める。