学 位 論 文 題 名

Reticular Lagrangian, Legendrian
Singularities and their applications

(網状ラグランジアン, ルジャンドリアン特異点論とその応用)

学 位 論 文 内 容 の 要 旨

滑らかな多様体上の超曲面芽を光源として発生する光の作る焦面 (caustic) を考える. 例えばリーマン多様体 M 上に超曲面芽があるとき, この超曲面芽の長さ 1 の余法線ベクトル達を初期値とする測地線を超曲面芽から発生した光子とみなし, この測地線達が T^*M のある 1 点のまわりでつくるラグランジアン部分多様体芽を M へ射影したときの臨界値がこの超曲面芽の作る焦面と定義する. このとき K.Jänich, G.Wassermann によって与えられた次の問題がある: 「光源となる超曲面芽の摂動に関して安定した焦面の形を分類せよ」. これは V.I.Arnold のラグランジアン特異点論の動機付けとなるものであり, ラグランジアン特異点論ではこの問題を一般化し, 「ラグランジアン部分多様体芽の摂動に関して安定した焦面の形を分類せよ」という問題を関数芽の特異点論である Mather 理論の右同値に関する結果を用いて分類している. 他方, 上記のラグランジアン部分多様体芽のかわりに $T^*M \times \mathbb{R}$ の (超曲面から発生した光子, 光子の発生した点と到達した点までの距離) からなる元全体によって定義される部分多様体のある 1 点での芽 (これは $T^*M \times \mathbb{R}$ のある接触構造のもとでのルジャンドリアン部分多様体芽となる) の $M \times \mathbb{R}$ への射影による像を超曲面芽を初期波面として発生した波面 (wavefront) とみなしたとき, 「超曲面芽の摂動に関して安定した波面の形を分類せよ」という問題が考えられるが, V.I.Arnold のルジャンドリアン特異点論ではこの問題を一般化し, 「ルジャンドリアン部分多様体芽の摂動に関して安定した波面の形を分類せよ」という問題を関数芽の特異点論の K 同値に関する結果を用いて分類している.

以上の歴史的背景をふまえ, 私は超曲面芽に境界や角, その他高次元の角がある場合に同様の問題を考え, この問題の一般化となる「網状ラグランジアン特異点論」(第 1 部) 及び「網状ルジャンドリアン特異点論」(第 3 部) を構築した. 又, その際に道具として必要となる関数芽の特異点論を網状右同値, 網状 K 同値という 2 つの同値関係について展開し, 網状右同値に関して modality ≤ 1 の関数芽を分類した. 網状 K 同値については余次元 7 以下での分類を行なった. その応用として, K.Jänich, G.Wassermann の問題の拡張「 r 次元の角を持つ超曲面芽を光源としてできる焦面が超曲面芽の摂動に関して安定しているような焦面の形を分類せよ」という問題の答を与える研究を行なった (第 2 部).

第 1 部) 網状ラグランジアン特異点論では V.I.Arnold のラグランジアン特異点論の拡張理論を研究した. 実際には Nguyen Huu Duc, Nguyen Tien Dai 及び F.Pham による複素上の regular r -cubic configuration に関する理論を C^∞ 上で実現することがスタートとなった. 主定理 1 は複素上での彼等による理論の C^∞ 版であるが, 彼等の証明は C^∞ 上では成立しておらず, 別の証明を与えることとなった. 主定理 2 は C^∞ 多様体上の regular r -cubic

configuration の安定性と対応する関数芽の安定性の同値性を主張するものだが、この安定性は C^∞ 特有のものであり、複素上に同様の安定性は存在しない。この理論では V.I. Arnold のラグランジアン写像の拡張となる網状ラグランジアン写像、その生成族及び安定性の概念を我々の目的に適用できるように定義し、以下の結果を得た。

主定理 1 (1) 任意の網状ラグランジアン写像に対してその生成族が存在する。

(2) 任意の非退化な関数芽に対してそれを生成族とする網状ラグランジアン写像が存在する。

(3) 2つの網状ラグランジアン写像がラグランジアン同値である為の必要十分条件はそれらの生成族が安定網状右同値となることである。

この定理により、網状ラグランジアン写像を分類することと網状右同値により非退化な関数芽を分類することは同値であることが分かる。

主定理 2 生成族 $F(x, y, q)$ を持つ網状ラグランジアン写像が安定である為の必要十分条件は F が $f = F|_{q=0}$ の網状右安定開折であることである。

主定理 1 と主定理 2 によって安定した網状ラグランジアン写像の焦面を分類する為には網状右同値のもとで安定した開折を分類すればよいことが分かり、関数芽の特異点論の結果から、安定した網状ラグランジアン写像によって定義される 6 次元以下の多様体上の焦面が分類されていることになる。

第 2 部) 応用理論では「 r 次元の角を持つ超曲面芽を光源としてできる焦面で超曲面芽の摂動にに関して安定しているようなものの形を分類せよ」という問題の一つの答を与えた。これは K.Jänich, G.Wassermann の研究を拡張したものとなっている。

K.Jänich によって与えられた光の伝播法則に従い、滑らかな多様体 M 上の光源となる r 次元の角つき超曲面芽 V^0 の各辺から発生した光は、 T^*M のある一点のまわりで 1 つの regular r -cubic configuration を定義する。又、 V^0 の摂動に関して対応する regular r -cubic configuration が安定しているとき、 V^0 は光学的に安定した焦面を作るという。このとき、G.Wassermann による結果の拡張となる次の定理を証明した。

定理 r 次元の角つき超曲面芽が光学的に安定した焦面を作るための必要十分条件は対応する regular r -cubic configuration が網状ラグランジアン写像として安定していることである。

この定理により、光学的に安定した焦面はすでに分類されている安定した網状ラグランジアン写像の焦面のどれかになることがわかる。

では逆に、安定した網状ラグランジアン写像の焦面が与えられた光の伝播法則上、光学的に安定した焦面として実現できるのはいつだろうか。この問題の一つの答えとなる結果を与えた。これは K.Jänich の拡張となっている。

第 3 部) 網状ルジャンドリアン特異点論では V.I. Arnold のルジャンドリアン特異点論の拡張理論を研究した。複素上に同様の理論は存在しない。

この理論では V.I. Arnold のルジャンドリアン写像の拡張となる網状ルジャンドリアン写像、その生成族及び安定性の概念を我々の目的に適用できるように定義し、以下の結果を得た。

主定理 1' (1) 任意の網状ルジャンドリアン写像に対してその生成族が存在する。

(2) 任意の非退化な関数芽に対してそれを生成族とする網状ルジャンドリアン写像が存在する。

(3) 2つの網状ルジャンドリアン写像がルジャンドリアン同値である為の必要十分条件はそれらの生成族が安定網状 K 同値となることである。

この定理により、網状ルジャンドリアン写像を分類することと網状 K 同値により非退化な関数芽を分類することは同値であることが分かる。

主定理 2' 生成族 $F(x, y, q, z)$ を持つ網状ルジャンドリアン写像が安定である為の必要十分条件は F が $f = F|_{q=z=0}$ の網状 K 安定開折であることである。

主定理 1' と主定理 2' によって安定した網状ルジャンドリアン写像の波面を分類する為には網状 K 同値のもとで安定した開折を分類すればよいことが分かる。
以上.

学位論文審査の要旨

主査	教授	泉屋周一
副査	教授	諏訪立雄
副査	教授	山口佳三
副査	教授	小野薫
副査	助教授	石川剛郎

学位論文題名

Reticular Lagrangian, Legendrian Singularities and their applications

(網状ラグランジアン, ルジャンドリアン特異点論とその応用)

滑らかな多様体上の超曲面芽を光源として発生する光の作る焦面 (caustic) の特異点の研究は V.I.Arnold のラグランジアン特異点論の動機付けとなるものであり, それは関数芽の特異点論である Mather 理論の右同値に関する結果が用いられている. 他方, 上記のラグランジアン部分多様体芽のかわりに $T^*M \times \mathbb{R}$ の (超曲面から発生した光子, 光子の発生した点と到達した点までの距離) からなる元全体によって定義される部分多様体のある 1 点での芽の $M \times \mathbb{R}$ への射影による像は超曲面芽を初期波面として発生した波面 (wavefront) とみなすことができるが, V.I.Arnold はルジャンドリアン特異点論としてとらえ, その特異点を関数芽の特異点論の K 同値に関する結果を用いて分類している. 以上の歴史的背景をふまえ, 本論文では超曲面芽に境界や角, その他高次元の角がある場合に同様の問題を「網状ラグランジアン特異点論」, 「網状ルジャンドリアン特異点論」として構築した. 又, その際に道具として必要となる関数芽の特異点論を「網状右同値」, 「網状 K 同値」という 2 つの同値関係について展開し, 網状右同値に関して $\text{modality} \leq 1$ の関数芽を分類し, 網状 K 同値については余次元 7 以下での分類を行なっている. その応用として, r 次元の角を持つ超曲面芽を光源としてできる焦面が超曲面芽の摂動に関して安定しているような焦面の特異点の分類を実行している. 実際には Nguyen Huu Duc, Nguyen Tien Dai 及び F.Pham による複素数体上の regular r -cubic configuration に関する理論を C^∞ 上で実現することがスタートとなったが, 彼等の証明は C^∞ 上では成立しておらず, 別の証明を与えることとなった. そして, その特異点の分類の為に関数芽の開折に関する新理論である関数芽の網状右同値理論及び網状 K 同値理論を構成し, その分類を応用している. これらの理論は, 実数体上の C^∞ 範疇独特のもので, その展開の為には出発点となった, 従来の研究からはまったくかけ離れた独創的なアイデアを必要とする. さらにその構成された理論において, 実際に分類を実行するためには, 並外れた集中力と忍耐力が必要である. 本論文の内容は, 大変良く整備され完成された理論体系を成していて, その応用には無限の可能性があると思われる.

これを要するに, 著者はラグランジュ (ルジャンドル) 特異点論の一般化としての網状ラグランジュ (ルジャンドル) 特異点論に関して新知見を得たものであり, シンプレクティック幾何学, 接触幾何学, 幾何光学及び特異点論に貢献すること大なるものがある.

よって著者は, 北海道大学博士 (理学) の学位を授与される資格あるものと認める.