

学 位 論 文 題 名

APPLICATIONS OF HARDY SPACES TO EQUATIONS IN FLUID DYNAMICS

(流体力学の方程式に対するハーディ空間の応用)

学位論文内容の要旨

ハーディ空間は L^1 -空間より少し小さい空間で、 L^1 -空間で有界とならないリース作用素が有界になるなどといった有用な性質を持つが、取り扱いが困難なため、偏微分方程式の解析への応用については十分研究されているとはいえない。本論文では半空間のストークス方程式の解の空間 1 階微分の評価を中心に流体力学の方程式に対するハーディ空間の応用を試みる。

本論文の主結果は 2 次形式の局所ハーディ空間における評価、半空間のストークス方程式のディリクレ問題の解の空間 1 階微分の L^1 -評価、および最大ノルムによる評価の 3 つで、それぞれ第 1 章、第 2 章、第 3 章に対応している。2 変数関数 $\psi(x, y)$ の偏導関数の作る 2 次形式 $(\psi_x)^2 - (\psi_y)^2$ は、 ψ_x, ψ_y が 2 乗可積分なら勿論可積分であるが、もし ψ が全空間で優調和なら実はより強く局所ハーディ空間に入る。この評価をもとにエヴァンス-ミューラーは初期渦度が非負である場合のオイラー方程式の解を構成した。この優調和性の条件は取り外すことは出来ないことも彼らによって指摘されていたが、本論文では ψ が y について奇関数かつ ψ が $y > 0$ で優調和と仮定しても局所ハーディ評価が得られないことを証明し、優調和性の仮定が本質的であることを示した。なお、この反例はエヴァンス-ミューラーによるものより単純である。

半空間におけるストークス方程式のディリクレ問題は、領域内を流れる流体の運動を記述するナビエ-ストークス方程式を研究する上での基礎になる。全空間の場合、ストークス方程式は熱方程式と本質的に同じなので、その解を u とすると、空間微分 ∇u に対してその空間方向の L^1 -ノルムは時刻 t の $-1/2$ 乗と初期値 u_0 の L^1 -ノルムとの積の定数倍で評価される。つまり、

$$\|\nabla u(t)\|_1 \leq Ct^{-1/2}\|u_0\|_1, \quad t > 0$$

を得る。ここで $\|u_0\|_1 = \int |u_0(x)|dx$ としている。同様な評価が半空間のストークス方程式に対して成り立つかどうかは、鵜飼による解の公式にリー

ス作用素を含むため自明ではない. この公式を組み換えて L^1 -空間の代わりにハーディ空間で ∇u を評価することで, 求めるべき評価よりも強い $\mathcal{H}^1$ - L^1 評価を得ることに成功した.

半空間のストークス方程式のディリクレ問題の解の空間微分の最大値ノルムを初期値の最大値ノルムで評価することを試みた. この評価は L^1 -評価の双対としては直ちには得られないが, ここでは更に鵜飼の解の公式中の解の拡張を変え, 接方向のラプラス作用素の平方根を含む項の評価が出来るようにした. その結果,

$$\|\nabla u(t)\|_{\infty} \leq Ct^{-1/2}\|u_0\|_{\infty}, \quad t > 0$$

を得ることに成功した. ただし, $\|u_0\|_{\infty}$ は u_0 の空間方向の最大値ノルムである. この公式の書き換えは, 他の問題を解析してゆく上でも重要であると考えられる.

学位論文審査の要旨

主査	教授	儀我美一
副査	教授	上見練太郎
副査	教授	久保田幸次
副査	教授	小澤徹
副査	助教授	津田谷公利

学位論文題名

APPLICATIONS OF HARDY SPACES TO EQUATIONS IN FLUID DYNAMICS

(流体力学の方程式に対するハーディ空間の応用)

ハーディ空間は L^1 -空間より少し小さい空間で、 L^1 -空間で有界とならないリース作用素が有界になるなどといった有用な性質を持つが、取り扱いが困難なため、偏微分方程式の解析への応用については十分研究されているとはいえない。本論文では半空間のストークス方程式の解の空間 1 階微分の評価を中心に流体力学の方程式に対するハーディ空間の応用をめざしている。

本論文の主結果は 2 次形式の局所ハーディ空間における評価、半空間のストークス方程式のディリクレ問題の解の空間 1 階微分の L^1 -評価、および最大値ノルムによる評価の 3 つで、それぞれ第 1 章、第 2 章、第 3 章に対応している。2 変数関数 $\psi(x, y)$ の偏導関数の作る 2 次形式 $(\psi_x)^2 - (\psi_y)^2$ は、 ψ_x, ψ_y が 2 乗可積分なら勿論可積分であるが、もし ψ が全空間で優調和なら実はより強く局所ハーディ空間に入る。この評価をもとにエヴァンス-ミュラーは初期渦度が非負である場合のオイラー方程式の解を構成した。この優調和性の条件は取り外すことは出来ないことも彼らによって指摘されていたが、本論文では ψ が y について奇関数かつ ψ が $y > 0$ で優調和と仮定しても局所ハーディ評価が得られないことを証明し、優調和性の仮定が本質的であることを示した。なお、この反例はエヴァンス-ミュラーによるものより単純である。

半空間におけるストークス方程式のディリクレ問題は、領域内を流れる流体の運動を記述するナビエ-ストークス方程式を研究する上での基礎になる。全空間の場合、ストークス方程式は熱方程式と本質的に同じなので、その解を u とすると、空間微分 ∇u に対してその空間方向の L^1 -ノルムは時刻 t の $-1/2$ 乗と初期値 u_0 の L^1 -ノルムとの積の定数倍で評価される。つまり、

$$\|\nabla u(t)\|_1 \leq Ct^{-1/2}\|u_0\|_1, \quad t > 0$$

を得る. ここで $\|u_0\|_1 = \int |u_0(x)|dx$ としている. 同様な評価が半空間のストークスの方程式に対して成り立つかどうかは, 鵜飼による解の公式にリース作用素を含むため自明ではない. この公式を組み換えて L^1 -空間の代わりにハーディ空間で ∇u を評価することで, 求めるべき評価よりも強い $\mathcal{H}^1 - L^1$ 評価を得ることに成功した.

さらに半空間のストークス方程式のディリクレ問題の解の空間微分の最大値ノルムを初期値の最大値ノルムで評価することを試みた. この評価は L^1 -評価の双対としては直ちには得られないが, 本論文では更に鵜飼の解の公式中の解の拡張を変え, 接方向のラプラス作用素の平方根を含む項の評価が出来るようにした. その結果,

$$\|\nabla u(t)\|_\infty \leq Ct^{-1/2}\|u_0\|_\infty, \quad t > 0$$

を得ることに成功した. ただし $\|u_0\|_\infty$ は u_0 の空間方向の最大値ノルムである. この公式の書き換えは, 他の問題を解析してゆく上でも重要であると考えられる.

これらの結果は, 流行にながされることなく物事を根本からよく見直すという態度によってはじめて得られたものである. 審査員一同は申請者が博士 (理学) の学位を授与される資格を十分に有するものと判定した.