

学 位 論 文 題 名

Affine Differential Geometry of Curves from
the View Points of the Singularity Theory

(特異点論の視点から見た曲線のアファイン微分幾何)

学位論文内容の要旨

ユークリッド空間における曲線の微分幾何を特異点論の立場から考察した研究は多くあるが、曲線のアファイン微分幾何を特異点論の立場から考察した研究は大変少ない。ユークリッド空間における曲線の微分幾何を特異点論の立場から考察する場合、距離二乗関数や高さ関数を用いて考察を進めていく。そして、アファイン微分幾何の場合、先ずこれらに対応する関数を開発することが求められた。そこで、これらの距離二乗関数や高さ関数に対応する関数として平面曲線に対して、アファイン距離三乗関数や高さ関数、空間曲線に対して、アファイン距離 (六乗) 関数や高さ関数を新たに開発した。

本論文は、大きく分けて二部構成になっている。第一部では平面曲線のアファイン微分幾何を、第二部では空間曲線のアファイン微分幾何を特異点論の視点から考察した。

先ず、平面曲線において次の事柄を明らかにした。最初に挙げられるのは、アファイン頂点やアファイン変曲点を特徴付けたことである。アファイン頂点やアファイン変曲点は、古典的には sextactic point や parabolic point にそれぞれ対応している。sextactic point は、ユークリッド平面における平面凸曲線の四頂点定理が示された頃から研究されている。ユークリッド平面においては、sextactic point は三階の微分方程式で特徴付けられており取り扱いが容易ではない。しかし、アファイン平面においては、アファイン曲率の零点として特徴付けられているので取り扱いが容易である。故に、sextactic point や parabolic point を考察するときは、アファイン平面で行なったほうが良いことがわかる。アファイン頂点はアファイン縮閉線、アファイン変曲点はアファイン法曲線の特異点 (ここでは、尖点) としての特徴付けが成功した。(本論文: 定理 3.1) これにより、計算機を用いて図を描かせた場合に視覚的にアファイン頂点やアファイン変曲点の存在が確認することが出来る。そこで、どのようにアファイン頂点やアファイン変曲点は、発生した消滅するのかが、新たな問題となる。その答として、アファイン頂点は、二つの通常のアファイン頂点が合わさり、位数 2 のアファイン頂点となり消滅し、発生に関しては、その逆を辿ることが明らかになった。アファイン変曲点に関しても同様な課程を辿る。(本論文: 定理 4.1 及び定理 4.1 の系) また、この結果も、アファイン縮閉線及びアファイン法曲線を用いることにより視覚的に確認することが出来る。

さて、ユークリッド平面における曲線の微分幾何において、平行曲線 (parallel) という概念があり、特異点論の立場から考察した研究もある。平行曲線 (parallel) とは、単位法線方向にもとの平面曲線を実数倍して得られる曲線である。この曲線が興味深いのは、対称集合 (symmetry set) を通して、ボロノイ図式と関連付けることにある。特に、ボロノイ図式は計算機を用いた映像理論に関連があることが良く知られている。そこで、これらと同

様な視点の考察をアファイン平面で試みた。アファイン平行曲線 (affine parallel) は、ユークリッド平面における平行曲線の類似として、アファイン法線方向にもとの平面曲線を実数倍して得られる曲線として定義される。本論文では、このアファイン平行曲線の特異点について考察した。結果として、アファイン平行曲線の特異点は、一般的に尖点であり、アファイン曲率中心と交わる場所で現れることが明らかになった。ただし、その尖点に対応するもとの曲線の点はアファイン頂点ではない。(本論文：命題 5.1)

次に、空間曲線において次の事柄を明らかにした。アファイン微分幾何における空間曲線論は、まだ完成されておらず不確かなことが数多く存在する。そこで、ユークリッド空間における空間曲線のフレネ-セレの公式と古典的に知られているアファイン微分幾何のフレネ-セレ型の公式を比較したとき、古典的なアファイン捩率の不自然さに目を付け、アファイン捩率を新たに定義し直すことから始めた。このとき、アファイン距離 (六乗) 関数や高さ関数を用いることにより、新たなアファイン捩率の定義を導いた。また、これらの関数を用いた計算から、アファイン従法線可展開面及びアファイン展直ガウス曲面を発見した。そして、これらの曲面の特異点を新たなアファイン捩率により特徴付けを行ない、それに成功した。(本論文：命題 定理 8.1)

学位論文審査の要旨

主査	教授	泉屋周一
副査	教授	諏訪立雄
副査	教授	山口佳三
副査	教授	小野薫
副査	助教授	石川剛郎

学位論文題名

Affine Differential Geometry of Curves from the View Points of the Singularity Theory

(特異点論の視点から見た曲線のアファイン微分幾何)

近年ユークリッド空間における曲線の微分幾何を特異点論の立場から考察した研究は盛んであるが、曲線のアファイン微分幾何のこの立場による研究は殆ど存在しない。ユークリッド空間における曲線の微分幾何を特異点論の立場から考察する場合、距離二乗関数や高さ関数を用いるが、アファイン微分幾何の場合、これに対応する扱い安い関数が知られていなかったのがその原因である。本論文ではこれらに対応する関数としてアファイン距離関数やアファイン高さ関数と言う関数を新たに定義しそれを用いてアファイン微分幾何の不変量を考察している。本論文は、二部構成になっており、まず第一部では平面曲線におけるアファイン頂点やアファイン変曲点を先の関数の特異点としての特徴付けを行っている。アファイン頂点やアファイン変曲点は、古典的には良く知られた概念であるが、それは、三階の微分方程式で特徴付けられておりユークリッド微分幾何学的には取り扱いが容易ではない。しかし、アファイン微分幾何学では扱いは格段に容易になることが本論文で明らかにされた。主要結果の一つとしてアファイン頂点はアファイン縮閉線、アファイン変曲点はアファイン法曲線の特異点(ここでは、尖点)としての特徴付けが行われている。これにより、計算機を用いて図を描かせた場合に視覚的にアファイン頂点やアファイン変曲点の存在を確認することが出来る。さらに、どのようにアファイン頂点やアファイン変曲点は、発生した消滅するのかも解析している。この場合も、アファイン縮閉線及びアファイン法曲線を用いることにより視覚的に確認することが出来る。

第二部では、空間曲線において次の事柄を明らかにしている。アファイン微分幾何における空間曲線論は、まだ完成されておらず不確かなことが数多く存在する。そこで、ユークリッド空間における空間曲線のフレネ-セレの公式と古典的に知られているアファイン微分幾何のフレネ-セレ型の公式を比較したときに認識される古典的なアファイン振率の不自然さに目を付け、アファイン振率を新たに定義し直すことが行われている。この場合、アファイン距離関数やアファイン高さ関数を用いることにより、新たなアファイン振率の定義を導くことに成功している。また、これらの関数を用いた計算から、アファイン従法線可展開面及びアファイン展直ガウス曲面という新たな曲面を発見し、それらの曲面の特異点をここで定義した新たなアファイン振率を用いて特徴付けをおこないその分類を完成している。

これらの研究はアファイン微分幾何への特異点論の応用と言うまったく未開の分野に先鞭を付ける研究であり、世界のこの分野の研究をリードするものである。このアファイン微分幾何は近年、映像理論への応用等の観点から再評価されている分野であり、その中でも本論文の成果はアファイン微分幾何自体の新たな発展の可能性を示唆すると同時に応用への一つの突破口を開くものと思われる。

これを要するに、著者は特異点論の応用としての曲線のアファイン微分幾何に関して新知見を得たものであり、微分幾何学、特異点論び映像理論に貢献すること大なるものがある。よって著者は、北海道大学博士(理学)の学位を授与される資格あるものと認める。