博士（理　学）　菊　地　秀　行

学 位 論 文 題 名

Abel-Tauber theorems for Hankel and Fourier transforms.

（ハンケル変換とフーリエ変換に対するアーベル・タウバー型定理について）

学位論文内容の要旨

本論文の主要結果はハンケル変換・フーリエ変換に対する新しいアーベル・タウバー型定理である。ここで扱うアーベル・タウバー型定理は、 $t \to \infty$ としたときの漸近挙動 $f(t) \sim \ell(t)t^{-\rho}$ （$\rho > 0$ かつ ℓ は slowly varying ）を f のハンケル変換 $H_\nu(x)$ （またはフーリエ変換）の言葉で特徴付けるものである。ただし $f(t)$ は $[0,\infty)$ 上の局所可積分関数 で $t \to \infty$ のとき最終的に減少しながら0に収束するものとし、無限遠点の近傍で定義された正値可測関数 ℓ が slowly varying であるとは、$\ell(\lambda x)/\ell(x) \to 1 \quad (x \to \infty) \quad \forall\lambda > 0$ が成り立つこととする。

簡単のため $\nu = -\frac{1}{2}$ 即ちコサイン変換の場合の背景を述べる。この主題は古くは Hardy の研究にまで遡る事ができ、 $\rho > 0$ かつ $\rho \neq 1,3,5,\cdots$ のときは Karamata の理論、即ち regular variation の理論を用いて結果が得られた。$\rho = 1,3,5,\cdots$ の場合は例外的でこの手法が使えず、異なる扱いが必要であることが認識されていたが未解決のままであった（この例外値は $\cos x$ のベキ級数展開と関係があり、一般のハンケル変換の場合は $\nu + \frac{3}{2}, \nu + \frac{7}{2}, \cdots$ が例外値となる）。1995 年に井上昭彦 [I1] は de Haan の理論、即ち Π-variation の理論を用いて $\rho = 1$ の場合を解決した。本論文は、残る $\rho = 3,5,\cdots$ の場合を解決した。

$[0,\infty)$ 上の関数 h が $t \to \infty$ のとき最終的に減少しながら0に収束し、かつ、実数 $\nu \geq -1/2$ について $t^{\nu+\frac{1}{2}}h(t) \in L^1_{\mathrm{loc}}[0,\infty)$ を満たすとする。このとき h のハンケル変換 H_ν を

$$H_\nu(x) := \int_0^{\infty-} h(t)(xt)^{1/2}J_\nu(xt)dt \quad (0 < x < \infty)$$

で定義し、さらに

$$\bar{H}_{\nu,n}(x) := x^{\nu+\frac{1}{2}+2n}\left\{H_\nu(1/x) - \sum_{j=0}^{n-1} c_{\nu,j}\int_0^{\infty} t^{\nu+\frac{1}{2}+2j}h(t)dt \cdot x^{-\nu-\frac{1}{2}-2j}\right\}$$

とおく。ただし $J_\nu(x)$ は Bessel 関数

$$J_\nu(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{\nu,j} x^{\nu+2j}, \qquad c_{\nu,j} := \frac{(-1)^j}{2^{\nu+2j} \cdot j! \cdot \Gamma(\nu+j+1)}$$

である。

また、可測関数 f が Π_ℓ に属するとは、ある定数 c に対して

$$\{f(\lambda x) - f(x)\}/\ell(x) \to c \log \lambda \quad (x \to \infty) \quad \forall \lambda > 0$$

が成り立つことをいい、このとき c を f の ℓ-index という。

主定理. 関数 h は実数 $\nu \geq -1/2$ について $t^{\nu+\frac{1}{2}} h(t) \in L^1_{\mathrm{loc}}[0,\infty)$ を満たすとする。このとき自然数 n と *slowly varying* な ℓ について

(1) $$h(t) \sim t^{-\nu-\frac{3}{2}-2n} \ell(t) \qquad (t \to \infty)$$

となるための必要十分条件は

(2) $$\int_0^\infty t^{\nu-\frac{3}{2}+2n} h(t) dt < \infty \quad \text{かつ} \quad \bar{H}_{\nu,n} \text{は} \ \Pi_\ell \ \text{に属し、その} \ \ell\text{-}index \ \text{は} \ c_{\nu,n}$$

である。

なお上の定理の条件 (2) における h の関与は $\nu = \pm\frac{1}{2}$ の場合には消去できる。実際井上との共著の論文 [IK] において、定理 1 を用いて Fourier コサイン変換 ($\nu = -\frac{1}{2}$) や Fourier サイン変換 ($\nu = \frac{1}{2}$) の場合には完全に H_ν だけの言葉で (2) を言い換えることができることを示した。コサイン変換の場合の結果は、確率変数の分布の tail-sum の挙動と特性関数のそれとの間の関係に直ちに応用される。また、主定理を応用してフーリエ級数に関する R. P. Boas の open problem (1967 年) に答を与えることができた。

学位論文審査の要旨

主　査　　教　授　　辻　下　　　徹
副　査　　教　授　　中　路　貴　彦
副　査　　教　授　　岡　部　靖　憲（東京大学大学院工学系研究科）
副　査　　助教授　　井　上　昭　彦

学　位　論　文　題　名

Abel-Tauber theorems for Hankel and Fourier transforms.

（ハンケル変換とフーリエ変換に対するアーベル・タウバー型定理について）

regular variationの理論は、Jovan Karamataによる有名な1930年の論文において創始された。Karamataの仕事の画期的な点は、新理論のタウバー型問題への応用にあり、これはいわゆる「Hardy–Littlewood–Karamataの理論」と呼ばれるものに発展した。Karamata のアイデアは、その後Karamata とその協力者が形成した「ユーゴスラビア学派」により、1930年から1960年代にかけて発展した。William Fellerは regular variationが 確率論への応用の大きな可能性を持つことを洞察し、その確率論の教科書（1968年,1971年版）により、この理論に対する一般の興味を呼び起こした。

regular variationのある種の一般化としてπ–variationがある。これを用いて、de Haanは1976年に、ラプラス変換に対するタウバー型定理を定式化し証明した。これは、regular variationでは捕らえられなかった「境界の場合」を解明したものであった。現在では、regular variationと同様に、π–variation に対しても、アーベル型、タウバー型、マーサー型定理が（大体）成立するということが、分かっている。

応用の面では、ラプラス変換（やべき級数）に対するタウバー型問題と同様に、フーリエ変換（やフーリエ級数）に対するタウバー型問題が重要である。フーリエ級数や変換に対するタウバー型問題の研究は、古くは今世紀初頭のHardyの頃まで遡る。しかし、条件収束性その他によりラプラス変換よりも取り扱いが難し

く、またそれ以上にフーリエ変換に特有の現象もあって、これまでの解決は必ずしも満足のいくものとは言えない。

例えば、次のような素朴なタウバー型問題がこれまで未解決であった。

ρを3以上の奇数とし、fを$[0,\infty)$上で定義された有界な関数で、単調に減少しながら0に収束するとする。この時、漸近挙動

$$f(t) \sim t^{\rho} \qquad (t \to \infty) \qquad (*)$$

をfのcosine変換の言葉で特徴付けよ。

（$\rho=1$の場合も未解決であったが、1995年に井上昭彦により解決された）。この問題は、本論文で得られた（フーリエ型積分変換である）Hankel変換に対するタウバー型定理により、ようやく解決されることになった。

cosine変換に対するタウバー型問題についてこの論文で得られた解決のポイントは（Hankel変換に対するそれについても同様だが）π-variationの概念の適用にある。実際、fの漸近挙動(*)はregular variationのタイプであるのに対し、対応するfのcosine変換の挙動の記述にはπ-variationの概念が必要となるという認識が遅れたことが、この問題の解決に長い年月を要した原因と思われる。

本論文のHankel変換に対するタウバー型定理の応用として、R.P. Boas著

"Integrability theorems for trigonemtric transforms"(Springer 1967)

中で提起された問題「単調とは限らないフーリエ係数に対するタウバー型定理を証明せよ。」が解決されている。

これを要するに、本論文は、フーリエ型積分変換に対するタウバー型問題について重要な新知見を得たものであり、既存の理論の重大な空隙を補うという点で貢献する所大なるものがある。

よって著者は、北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格あるものと認める。