

学 位 論 文 題 名

# Morita-Mumford classes on finite automorphism groups of Riemann surfaces.

(リーマン面の有限自己同型群上の森田・マンフォード類について)

## 学位論文内容の要旨

本稿は2つの部分から成る. まず第1部では一般的な不動点公式を述べ(定理1), 第2部ではそれを用いて具体的な計算を行った(定理2, 3). まず第1部について述べる.

種数  $g$  の有向閉曲面  $\Sigma_g$  の写像類群  $M_g$  のコホモロジー群の研究は, 1980年代から急速な発展を見せている. 中でも Morita と Mumford が独立して発見した Morita-Mumford 類は重要である. これは次のように定義される. 以下本稿では  $\Sigma_g$  をファイバーに持つような有向ファイバー束  $\pi: X \rightarrow B$  を曲面束と呼ぶことにし, コホモロジー群は全て  $\mathbb{Z}$  係数で定義されているとする. この  $\pi$  から定まる相対接束  $T_{X/B}$  の Euler 類を  $e \in H^2(X)$  とする.  $n$  次 Morita-Mumford 類 (以下MM類と略記する) とは,  $e$  の  $n+1$  乗べき  $e^{n+1}$  の,  $\pi$  より定まる Gysin 準同型  $\pi_!$  による像である:

$$e_n(X) := \pi_!(e^{n+1}) \in H^{2n}(B).$$

特に  $g \geq 2$  のときは,  $e_n(X)$  は  $M_g$  から定義されるMM類  $e_n \in H^{2n}(M_g)$  を, ファイバー束から決まる  $\pi_1(B)$  から  $M_g$  へのホロノミー準同型によって引き戻したものに等しいことが知られている. そこで, 「 $M_g$  の有限部分群  $G$  に対し,  $e_n$  の  $G$  への制限  $e_n|_G \in H^{2n}(G)$  はどのようなものか」という問題を考察した. この問題は Kerckhoff による Nielsen の実現問題の肯定的解決を踏まえ, 次のように言い換えることができる.

$G$  を有限群,  $C$  を種数  $g$  の閉 Riemann 面とし,  $G$  が  $C$  に忠実かつ正則に作用しているような状況を考える. この状況のもとで普遍主  $G$  束をとることにより, Borel 構成  $C_G$  を考えることが出来る. このとき  $C$  をファイバーに持つ  $C_G$  から分類空間  $B_G$  への有向ファイバー束が定義できるので, それによりMM類  $e_n(C_G) \in H^{2n}(B_G) = H^{2n}(G)$  が定義できる. このMM類は先程述べた  $e_n|_G \in H^{2n}(G)$  に等しい. そこで先程の問題は, 「この  $e_n(C_G)$  はどのようなものか」という問題に帰着するのである. 結果としてこれは  $G$  の  $C$  への作用の固定点の情報を用いて表せることが分かった.  $p \in C$  の固定化部分群を  $G_p$  とし, singular set  $S$  を  $S := \{p \in C | G_p \neq \{1\}\}$  とする.  $p$  の接空間を  $T_p C$  とし,  $G_p$  の  $T_p C$  への作用から定義される Euler 類を  $e(T_p C) \in H^{2n}(G_p)$  とする. このとき,  $G_p$  から  $G$  への包含写像から定義される transfer 写像  $\text{cor}_{G_p}^G: H^*(G_p) \rightarrow H^*(G)$  を用いて,  $e_n(C_G)$  を記述する次の公式を得た.

$$\text{定理 1} \quad e_n(C_G) = \sum_{p \in S/G} \text{cor}_{G_p}^G(e(T_p C)^n) \in H^{2n}(B_G) = H^{2n}(G).$$

Morita と Miller は, fiberwise な分岐被覆についてのMM類の計算公式を得ていた. 定理 1 は, その計算公式を一般化したものを, 先程考えた状況において書き下したものである.

第2部においては, 閉リーマン面  $C$  への有限巡回群  $G$  の忠実かつ正則な作用を考える.

まず  $m$  を  $G$  の位数とし,  $\phi(m)$  を  $m$  の Euler 関数, つまり  $G$  の生成元の個数とする. また,  $\zeta = \exp(2\pi\sqrt{-1}/m)$  とする.  $G$  の生成元  $\gamma$  を 1 つ固定する.  $\gamma$  の作用が  $\zeta$  倍であるような複素 1 次元  $G$  加群を  $R$  とする.  $R$  に伴う分類空間  $B_G$  上の直線束の Euler 類を  $u_0 \in H^2(G)$  とする. このとき, 次の定理が  $n \geq 0$  について成り立つ.

$$\text{定理 2} \quad e_{n+\phi(m)}(C_G) = e_n(C_G)u_0^{\phi(m)} \in H^{2(n+\phi(m))}(G).$$

定理 2 を用いて第2部の主定理を示す. ここでは  $C$  として複素射影平面内の Klein 曲線を考える. この  $C$  の種数は 3 である. また  $C$  の自己同型群の位数は 168 で, 射影特殊線型群  $PSL(2, 7)$  と同型であることが知られている. この  $PSL(2, 7)$  の共役類も知られており, それによると  $PSL(2, 7)$  のどの 2 つの巡回部分群も位数が同じならば互いに共役であり, かつそれらは  $\mathbb{Z}/2$ ,  $\mathbb{Z}/3$ ,  $\mathbb{Z}/4$ ,  $\mathbb{Z}/7$  の何れかに同型であることがわかっている. 本稿では, この  $PSL(2, 7)$  の任意の有限巡回部分群  $G$  を Klein 曲線  $C$  に作用させることにより得られるMM類を計算し, 次の結果を得た.

### 定理 3

(1)  $G \cong \mathbb{Z}/7$  ならば  $H^{2n}(G; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/7$  の元として,

$$e_n(C_G) = \begin{cases} 3u_0^n, & n \text{ は } 3 \text{ の倍数のとき,} \\ 0, & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

である. ここで  $u_0$  は  $\zeta = \exp(2\pi\sqrt{-1}/7)$  から定義される Euler 類である.

(2)  $G \cong \mathbb{Z}/3$  ならば  $H^{2n}(G; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/3$  の元として,

$$e_n(C_G) = \begin{cases} 2v_0^n, & n \text{ は偶数のとき,} \\ 0, & n \text{ は奇数のとき} \end{cases}$$

である. ここで  $v_0$  は  $\omega = \exp(2\pi\sqrt{-1}/3)$  から定義される Euler 類である.

(3)  $G \cong \mathbb{Z}/2$  ならば  $e_n(C_G) = 0 \in H^{2n}(G; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2$  である.

(4)  $G \cong \mathbb{Z}/4$  ならば  $e_n(C_G) = 0 \in H^{2n}(G; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/4$  である.

次に定理 3 の結果の拡張として,  $n \geq 4$  を任意の 2 の倍数, 又は 3 の倍数とした際に  $e_1 = e_2 = \cdots = e_{n-1} = 0$ ,  $e_n \neq 0$  となるような, 有限巡回群の閉リーマン面への作用を具体的に構成した. 最後に  $C$  が超楕円曲線である場合について, 2 つの例を計算した. 特に  $C$  の種数が 1 のときには,  $n$  が奇数ならば  $e_n \neq 0$ ,  $n$  が偶数ならば  $e_n = 0$  となるような有限巡回群の作用が得られた.

# 学位論文審査の要旨

|     |     |         |
|-----|-----|---------|
| 主 査 | 教 授 | 諏 訪 立 雄 |
| 副 査 | 教 授 | 泉 屋 周 一 |
| 副 査 | 教 授 | 小 野 薫   |
| 副 査 | 教 授 | 中 村 郁   |
| 副 査 | 助教授 | 河 澄 響 矢 |

## 学 位 論 文 題 名

### Morita-Mumford classes on finite automorphism groups of Riemann surfaces.

(リーマン面の有限自己同型群上の森田・マンフォード類について)

リーマン面の有限自己同型群に関する研究は、複素解析学の一分野として19世紀以来つづけられてきたが、これを位相幾何学とくにコホモロジーの立場から研究することは重要な課題である。ホモロジー表現のチャーン類については以前から研究されてきた。しかし、写像類群にとってはチャーン類よりも森田・マンフォード類の方がより本質的である。それにもかかわらず、リーマン面の有限自己同型群の上での森田・マンフォード類は今日まで殆ど研究されて来なかった。本論文が考察するのはこれである。

本論文は、二つの部分に分かれる。前半では、任意のリーマン面の有限自己同型群の上で、森田・マンフォード類の不動点公式を与えている。この不動点公式を使って、後半では、有限巡回群作用について森田・マンフォード類が周期性をもつことを示し、種数3のクライン曲線へのすべての有限巡回群作用について、森田・マンフォード類を完全に計算している。さらに、森田・マンフォード類が興味深い振る舞いをする、いろいろな有限巡回群作用を構成して見せている。これらは、有限群上の森田・マンフォード類が具体的に計算できることを世界で初めて明らかにしたものであり、新しい研究分野を拓くものである。

これを要するに、著者は、リーマン面の有限自己同型群のコホモロジー的研究に関する新知見を得たものであり、これらはリーマン面の対称性および写像類群の解明に本質的な進歩をもたらし、位相幾何学および複素解析学に貢献するところ大なるものがある。

よって著者は、北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格あるものとみとめる。