

学 位 論 文 題 名

# Global Existence of Solutions to Systems of Wave Equations with Critical Nonlinearity

(臨界非線形性を持つ連立波動方程式の解の大域存在)

## 学位論文内容の要旨

本論文では、2 次元空間および 3 次元空間における連立波動方程式

$$\partial_t^2 u^i - c_i^2 \Delta u^i = F^i(\partial u, \partial^2 u) \quad (i = 1, \dots, m) \quad \text{in } [0, \infty) \times \mathbf{R}^n \quad (n = 2, 3)$$

に対する初期値問題について、時間大域解の存在条件を論ずる。ただし、非線形項を与える関数  $F^i$  および初期値はすべて滑らかであるとし、滑らかな解を考察する。また、 $F^i$  が未知関数  $u^i$  の 2 階導関数について 1 次である、いわゆる準線形の場合を考える。初期値として small data を考えるとき、時間大域解が存在する条件は  $(\partial u, \partial^2 u) = 0$  の近傍での  $F^i$  の未知関数についての次数に依存する。この次数に関する依存は  $\partial_t^2 u - \Delta u = |\partial_t u|^p$  ( $m = 1$ ) という方程式についてよく調べられている。 $p_c = (n+1)/(n-1)$  とするとき、 $p > p_c$  なら十分小さい初期値に対して大域解が存在し、 $1 < p \leq p_c$  ならばたとえ small data であっても大域解は必ずしも存在しない。そこで、 $p_c$  が critical power を与える。critical power においては  $F^i$  の主要部は  $p_c$  次斉次多項式であり、存在条件はその多項式に対するある代数的条件で与えられる。この条件を null condition とよぶ。

著者は critical power を持つ非線形項  $F^i$  について null condition の下での時間大域解の存在定理を研究した。特に伝播速度の異なる連立方程式を扱うのが特徴である。方程式における伝播速度を表す定数  $c_i$  が一致しない場合には、critical power での時間大域解の存在を許すような非線形項に、単独方程式にはない連立方程式に特有の形が現れる。この非線形項は resonance form と呼ばれるもので、最初は null condition を満たすものであるとは認識されていなかった。ところが、これと従来から null form として知られていた非線形項とを統

一する形で条件が述べられるようになったため、実際に統一的に扱えるようにしようというのがひとつの動機である。もともと別々に扱われていた、これら 2 つの型を共に含むような非線形項を考察することは伝播速度によらない方法で必要な評価を導くことを意味する。

伝播速度の一致しない連立波動方程式はまた、弾性体の方程式と密接なつながりを持つ。 $n = 3$  の場合には線型の弾性体の方程式に対する解について発散と回転をとると、これらは 2 つの異なる速度に対する波動方程式の解になっている。さらに、ある自然な物理的仮定から導かれる弾性体の方程式は 3 次元の critical power にあたる 2 次の非線形性を持ち、その解の発散と回転は異なる 2 つの伝播速度を持つ非線形連立波動方程式を満たす。

本論文は Part I および Part II から成る。Part I においては、 $n = 3$  であって伝播速度  $c_i$  が必ずしも一致しない場合に、null condition をみたせば時間大域解が存在することを示している。まず解の  $N$  次導関数のウェイト付  $L^\infty - L^2$  評価を導き、次に解の  $N$  次導関数の  $L^2$  ノルムが有界であることを示すことにより、small data に対する解の 2 次導関数の  $L^\infty$  ノルムがアприオリに有界であることが示され、そこから時間大域解の存在が示される。ここで用いた評価法は従来の方法に比べ、複雑なウェイトを意識する必要がなく、見通しが立てやすいという利点を持つ。そこで、より複雑な 3 次元の 2 次の非線形性をもつ弾性体の方程式にも応用されている。

Part II は著者の指導教官との共同研究に基く。Part II においては、 $n = 2$  であって伝播速度  $c_i$  が必ずしも一致しない場合に、null condition をみたす多項式のうち、resonance form と呼ばれる多項式に対応する非線形項について時間大域解の存在を示している。時間大域解存在のための論法は Part I と同様であるが、この時点では null form と resonance form を同時に扱えず、部分的な結果にとどまっている。

以上の研究により、臨界非線形性をもつ連立波動方程式に対する時間大域解の存在定理を統一的な視点から述べることに成功した。

# 学位論文審査の要旨

|    |    |     |     |
|----|----|-----|-----|
| 主査 | 教授 | 上見  | 練太郎 |
| 副査 | 教授 | 久保田 | 幸次  |
| 副査 | 教授 | 儀我  | 美一  |
| 副査 | 教授 | 小澤  | 徹   |

学位論文題名

## Global Existence of Solutions to Systems of Wave Equations with Critical Nonlinearity

(臨界非線形性を持つ連立波動方程式の解の大域存在)

本論文では、2次元空間および3次元空間における連立波動方程式

$$\partial_t^2 u^i - c_i^2 \Delta u^i = F^i(\partial u, \partial^2 u) \quad (i = 1, \dots, m) \quad \text{in } [0, \infty) \times \mathbf{R}^n \quad (n = 2, 3)$$

に対する初期値問題について、時間大域解の存在条件を論ずる。ただし、非線形項を与える関数  $F^i$  および初期値はすべて滑らかであるとし、滑らかな解を考察する。また、 $F^i$  が未知関数  $u^i$  の2階導関数について1次である、いわゆる準線形の場合を考える。まず、時間大域解が存在するか否かは  $(\partial u, \partial^2 u) = 0$  の近傍での  $F^i$  の未知関数についての次数に依存する。 $\partial_t^2 u - \Delta u = |\partial_t u|^p$  ( $m = 1$ ) という方程式において、 $p_c = (n+1)/(n-1)$  とするとき、 $p > p_c$  なら十分小さい初期値に対して大域解が存在し、 $1 < p \leq p_c$  ならばたとえ small data であっても大域解は必ずしも存在しない。そこで、 $F^i$  の主要部が  $p_c$  次斉次多項式であるときに臨界非線形性を持つという。このとき、大域解の存在条件はその多項式に対するある代数的条件で与えられるが、この条件を null condition とよぶ。

著者は臨界非線形性を持つ非線形項  $F^i$  について null condition の下での時間大域解の存在定理を研究した。特に伝播速度の異なる連立方程式を扱うのが特徴である。方程式における伝播速度を表す定数  $c_i$  が一致しない場合には、臨界非線形性を持ちながら時間大域解の存在を許すような非線形項に、単独方程式にはない連立方程式に特有の形が現れる。この resonance form と呼ばれる非線形項と、従来から null form として知られていた非線形項と

を統一する形で条件が述べられるようになったため、実際に統一的な枠組で大域解の存在を論じることが著者の目的である。

伝播速度の一致しない連立波動方程式はまた、弾性体の方程式と密接なつながりを持つ。 $n = 3$  の場合には線型の弾性体の方程式に対する解について発散と回転をとると、これらは 2 つの異なる速度に対する波動方程式の解になっている。さらに、ある自然な物理的仮定から導かれる弾性体の方程式は 3 次元の critical power にあたる 2 次の非線形性を持ち、その解の発散と回転は異なる 2 つの伝播速度を持つ非線形連立波動方程式を満たす。

本論文は Part I および Part II から成る。Part I においては、 $n = 3$  であって伝播速度  $c_i$  が必ずしも一致しない場合に、null condition をみたせば時間大域解が存在することを示している。ここで用いた評価法は従来の方法に較べ、複雑なウェイトを意識する必要がなく、見通しが立てやすいという利点を持つ。そこで、より複雑な 3 次元の 2 次の非線形性をもつ弾性体の方程式にも応用されている。

Part II は著者の指導教官との共同研究に基く。Part II においては、 $n = 2$  であって伝播速度  $c_i$  が必ずしも一致しない場合に、null condition をみたす多項式のうち、resonance form と呼ばれる多項式に対応する非線形項について時間大域解の存在を示している。時間大域解存在のための論法は Part I と同様であるが、この時点では null form と resonance form を同時に扱えず、部分的な結果にとどまっている。

以上の研究により、臨界非線形性をもつ連立波動方程式に対する時間大域解の存在定理を統一的な視点から述べることに成功した。よって著者は北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格あるものと認める。