

学 位 論 文 題 名

Dynamics of self-replicating patterns in the one-dimensional Gray-Scott model

(一次元 Gray-Scott モデルにおける自己複製パターンのダイナミクス)

学位論文内容の要旨

非線形・非平衡系に現れる多種多様なパターンの多くは本質的に遷移過程に現れるものが多い。そのようなパターンの研究はこれまでに多くのものがあるが、その殆んどは遷移過程を経過した後の最終状態である定常パターンや周期パターンに注目したものである。近年の実験技術の発展は我々に様々な動的パターンを示し多くの課題を提起している。そのうち最も注目されているものの一つが遷移過程に現れる動的パターンである。しかしながらそのような方向の数理的研究はほとんどなく、本研究が最初のものの一つである。

その様な本質的に遷移過程に現れるパターンとして代表的なものが自己複製パターンであり、次に示す Gray-Scott モデルと呼ばれる反応拡散モデルが最も良く知られている。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D_u \nabla^2 u - uv^2 + F(1-u) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = D_v \nabla^2 v + uv^2 - (F+k)v. \end{cases} \quad (1)$$

Gray-Scott モデルには、

1. Bogdanov-Takens 特異点（余次元 2）をもつ。
2. Turing 不安定性を起こす。
3. 自明な安定平衡点 $(u, v) = (1, 0)$ をもつ。

といった特徴があり、拡散項を取り除いたカイネティクス部分は、パラメータ F を止めて k を十分小さく取れば双安定 (bi-stable) となり、そこから k を徐々に大きくしていくとサドルノード分岐 (saddle-node bifurcation) を経て単安定 (mono-stable) となる。3 番目に挙げた自明な安定平衡点 $(u, v) = (1, 0)$ は全ての (k, F) において存在し、 $(u, v) = (1, 0)$ という (1) の空間一様解は全ての (k, F) について微少摂動に対して安定である。

一次元 Gray-Scott モデルに現れる自己複製パターンは、はじめ一山であったパターンが時間とともに二山、三山と分裂し、自分自身と同じものを複製した後、最終的には例えば三山の安定なチューリングパターンとして落ち着く。なお、はじめの一山は安定な空間一様状態 $(u, v) = (1, 0)$ に有限摂動を加えることで生成される。この様に、自己複製パターンは安定な空間一様状態に有限摂動を加えることで発生し、最終的に安定な空間非一様状態に至る遷移過程に現れるパターンであることがわかる。

自己複製パターンに代表されるような本質的に遷移過程に現れるパターンは、その取り扱いの難しさからこれまで殆んど取り上げられてこなかったというのが現実である。そこで我々は実験数学という立場から Gray-Scott モデルの大域的な分岐構造を調べた。その結果、チューリング枝の極限点 (limiting point) の整列階層構造と、低いモード数のチューリングパターンから高いモード数のチューリングパターンへと

繋がる不安定多様体の存在を発見した。

最終的に我々は極限点の整列階層構造とそれらを繋ぐ不安定多様体からなる大域的な分岐構造の余韻 (aftereffect) が自己複製パターンを生成しているという認識を得ることができ、自己複製というプロセスが必然的に起こるメカニズムを見いだすことに成功した。

学位論文審査の要旨

主査	教授	西浦	廉政
副査	教授	辻下	徹
副査	教授	津田	一郎
副査	助教授	小林	亮

学位論文題名

Dynamics of self-replicating patterns in the one-dimensional Gray-Scott model

(一次元 Gray-Scott モデルにおける自己複製パターンのダイナミクス)

近年、非平衡・非線形の一つの典型的現象として、自己複製パターンが注目を集めているが、これは遷移ダイナミクスの一つの難形を与えていると考えられる。すなわち、初期に摂動を与えて最終状態に落ち着くまでの途中に現れる現象であり、トランジェントな対象である。力学系的観点から遷移ダイナミクスをどのように捉えるかという問題はその重要性と面白味にも拘らず、様々な漸近的手法の発展に比べると大きく立ち後れている。それを記述する数理的枠組みが整備されていないということもあるが、遷移過程そのものがあまり俎上にのぼることがなかったことも大きな原因である。申請者は Gray-Scott モデルと呼ばれる反応拡散方程式に対し、自己複製ダイナミクスは極限点の整列階層構造の端 (Edge of folding points) という大域分岐構造の結果として現れる、必然的なものであることを明らかにした。

自己複製ダイナミクスは途中の過程で現れるプロセスであり、それらの軌道を集めても相空間の中で意味のある集合を形成するものではない。このことは問題を極めて困難にさせる。なぜなら上のようなダイナミクスは何らかの不変多様体を用いて、例えばパルス解をホモクリニック軌道に対応させるような形で記述することができないからである。力学系理論が不変多様体理論と共に発展してきたことを考えると別の捉え方をせまられているとも言える。

申請者はこの困難に対し、計算機支援による実験数学的手法により、その定常解の大域分岐構造が遷移ダイナミクスの形成にどのように関わるかを調べることにより、自己複製パターンを「極限点の整列階層構造の余韻」として特徴付けることに成功した。このアイデアは西浦との共同研究で既に得られていたが、具体的なモデルで陽的にその存在を明らかにしたのはこれが最初でありその意義は大きい。同時にそれは大域的な分岐構造という立場から遷移ダイナミクスを調べることの有用性を明らかにした。現在のところ、このような大域的振る舞いを調べるのは計算機による地道な枝の追跡が不可欠である。しかしやみくもに枝を追いかけてもそれは極めて複雑な枝のからみが得られるだけで、何の情報も得られない。力学系的観点が入ることにより、はじめてそこからどの構造が考えているダイナミクスを生成しているか予想することができるのである。トランジェントなダイナミクスとしてよく知られている不安定な鞍点を次々に経巡るという遷移軌道の場合にはそれを駆動する枠として鞍点をつなぐ不変多様体が存在するが、自己複製パターンの場合には相空間にそのような不変多様体は存在しない。しかし分岐パラメータを含めた「拡張された相空間 (extended phase space)」で見れば、自己複製パターンを生み出す整列階層構造が背景に浮かび上がってくる。そのような構造をもち、自己複製パターンを生み出すモデルは Gray-Scott モデル以外にもいくつか知られている。それらに共通する点は

1. Bogdanov-Takens 特異点 (余次元 2) をもつ。
2. Turing 不安定性を起こす。
3. 自明な安定平衡点をもつ。

である。これら 3 つの条件が自己複製ダイナミクスを作り出す重要な要素であることは確実と思われるが、必要あるいは十分条件としての要件を備えているかどうかは今後の課題である。

以上の結果は Gray-Scott モデルの定常型自己複製現象というこれまで数学的記述が困難であった遷移過程に新知見を与えるものであり、パターン形成の数学的基盤に対して貢献するところ大なるものがある。よって申請者は、北海道大学博士 (理学) の学位を授与される資格あるものと認める。