

学 位 論 文 題 名

An Inverse Problem for a Quantum Particle Interacting
with a Bose Field and Long-Time Behavior of Canonical
Correlation Functions in an Infinite Volume Limit(ボース場と相互作用した量子系の粒子に対するある逆問題と
無限体積極限におけるカノニカル相関関数の長時間挙動)

学 位 論 文 内 容 の 要 旨

本論文では、無限体積極限における位置の作用素もしくは運動量の作用素のカノニカル相関関数の長時間挙動を扱う。まず、有限体積のパラメータを $V > 0$ として、無限自由度のボース粒子の適当な条件を満たす任意の物理系と熱平衡状態にある量子調和振動子を考える。本論文で扱うモデルは、例えば、レーザーが熱浴を通過するときに観測される、熱浴による振動と相互作用するレーザーの光子、また例えば、材料表面に弱いレーザーを照射したときに観測される、材料表面のフォノン振動と相互作用するレーザーの光子の取り扱いを数学の中で可能にするものである。有限温度 $T > 0$ での観測で、調和振動子の位置の作用素もしくは運動量の作用素のカノニカル相関関数 $R^V(t_1, t_2)$ が与えられたとき、 $R^V(t_1, t_2)$ に対して、ある適当な条件下で無限体積極限 $V \rightarrow \infty$ を取り、逆温度 $\beta \equiv 1/T$ に対する極限関数 $R_\beta^\infty(t_1, t_2) \equiv \lim_{V \rightarrow \infty} R^V(t_1, t_2)$ を得て、この $R_\beta^\infty(t_1, t_2)$ に対する長時間挙動を議論することが本論文の目的である。

パラメータ $V > 0$ に対して、 $\Gamma_V \equiv 2\pi\mathbf{Z}/V$ とおき (ここで \mathbf{Z} は整数全体の集合)、有限体積における物理系の状態空間を表すヒルベルト空間 \mathcal{F}^V を $L^2(\mathbf{R}) \otimes \mathcal{F}_b^V$ で与える。ここで、 $L^2(\mathbf{R})$ は実数体上の 2 乗可積分関数全体の集合、 \mathcal{F}_b^V は $\ell^2(\Gamma_V)$ 上の対称フォック空間 (ただし、 $\ell^2(\Gamma_V)$ は Γ_V を添字とする 2 乗総和可能な数列全体の集合)。今、 a と a^* をそれぞれ量子調和振動子の \mathcal{F}^V に作用する消滅作用素と生成作用素とし、 b_k と b_k^* ($k \in \Gamma_V$) をそれぞれボース粒子の \mathcal{F}^V に作用する消滅作用素と生成作用素とする。本論文では、系の時間発展を支配するハミルトニアンと呼ばれる \mathcal{F}^V 上の自己共役作用素 H_V が存在すると仮定する。しかしながら、ここでは具体的な H_V の形を特定しない。

最初に、本論文では、ある条件を満たす任意の (自己共役作用素で与えられる) 観測のカノニカル相関関数 $R^V(t_1, t_2)$ に対して次のような逆問題を解いた: 自己共役作用素 H^V を $R^V(t_1, t_2)$ のみで決まる係数と a, a^*, b_k, b_k^* ($k \in \Gamma_V$) で記述される回転波近似 (RWA) と呼ばれる自己共役作用素 H_{RWA}^V で次の条件を満たすように推定する。その条件とは「多粒子系の量子論の意味で H_{RWA}^V のゼロ以外のエネルギー・レベルが、 $R^V(t_1, t_2)$ のフーリエ・ラプラス変換の正の極と一致し、 $R^V(t_1, t_2)$ は H_{RWA}^V によるハイゼンベルグ描像の真空期待値 (二点相関関数) $W^V(t_1, t_2)$ で記述できる」ことである。次に、無限体積極限を取ることで、 H_{RWA}^V が、ヒルベルト空間 $\mathcal{F}^\infty \equiv L^2(\mathbf{R}) \otimes \mathcal{F}_b$ に作用する RWA の自己共役作用素 H_{RWA} にノルム・レゾルベントの意味で収束することを示した。ここで、 \mathcal{F}_b は $L^2(\mathbf{R})$ 上の対称フォック空間。このことと、最初の結果を位置の作用素と運動量の作用素に適用し、 $R^V(t_1, t_2)$ の $W^V(t_1, t_2)$ による表現を使って、無限体積におけるカノニカル相関関数 $R_\beta^\infty(t_1, t_2)$ を得る。このとき同時に、 $R^V(t_1, t_2)$ のときと同じように、無限体積版の二点相関関数 $W_\beta^\infty(t_1, t_2)$ による $R_\beta^\infty(t_1, t_2)$ の表現が求まるので、この表現を通して $R_\beta^\infty(t_1, t_2)$ の長時間挙動を議論し、それに関する結果を得た。

学位論文審査の要旨

主査 教授 新井朝雄
副査 教授 岸本晶孝
副査 教授 中路貴彦
副査 助教授 井上昭彦

学位論文題名

An Inverse Problem for a Quantum Particle Interacting with a Bose Field and Long-Time Behavior of Canonical Correlation Functions in an Infinite Volume Limit

(ボース場と相互作用した量子系の粒子に対するある逆問題と無限体積極限におけるカノニカル相関関数の長時間挙動)

近年、量子力学的粒子と量子場の相互作用に関する種々のモデルが無限次元解析学あるいは厳密な数理物理学の観点から研究されてきている。この種のモデルの数学的研究における重要な課題のひとつは、粒子の相関関数あるいは真空期待値の長時間挙動を調べることである。しかし、相互作用のいくつかのクラスを除いては、相関関数の長時間挙動について、非摂動的で厳密な結果は得られていないのが現状である。本論文は、この問題に対して、ある新しい観点からの寄与をあたえるものである。

この論文では、1個の量子力学的粒子がボース場と正温度において相互作用をする系を考える。しかし、従来の方法とは異なり、はじめからハミルトニアンは特定せず、それは、ある種の条件をみたす抽象的な自己共役演算子でよいとする。まず、有限体積の系において、物理量の集合の中にポゴリューボフ内積とよばれる内積を導入し、これによって、粒子のカノニカル相関関数 $R^V(t_1, t_2)$ を定義する。ここで、 $V > 0$ は系の体積を表すパラメーター、 $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ は時間を表すパラメーターである。関数 R^V の基本的性質が調べられる。本論文の主定理は、回転波近似とよばれるハミルトニアンに関する2点真空期待値 $W^V(t_1, t_2)$ を用いて、 $R^V(t_1, t_2)$ を表したことである。これは、2点関数がわかっているときに、系のハミルトニアンを推定するという、ある種の逆問題を解いたことになり、この意味でも重要な結果である。この定理を証明するための方法の基礎となるのは、抽象的に定式化された、統計力学における森の理論をうまく応用することである。著者は、すでにこの理論についてもいくつかの独創的な結果を出している。

いま言及した主定理に基づいて、回転波近似の真空期待値 W^V の無限体積極限 $W(t_1, t_2) := \lim_{V \rightarrow \infty} W^V(t_1, t_2)$ をとることにより、いくつかの条件のもとで、 R^V の無限体積極限 $R(t_1, t_2) := \lim_{V \rightarrow \infty} R^V(t_1, t_2)$ の存在が示される。関数 $W(t_1, t_2)$ の長時間挙動に関してすでに知られている結果を応用することにより、 $R(t_1, t_2)$ の長時間挙動が導かれる。

こうして、著者は、ある一般的なクラスのハミルトニアンに関するカノニカル相関関数の表現定理とその応用として、カノニカル相関関数の長時間挙動に関する定理を確立している。以上の結果は、すべて非振動的であり、独創的な新しい結果である。本論文で得られた成果は、この分野の研究の進展に貢献するところ大なるものがある。

よって、著者は、北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格あるものと認める。