

学 位 論 文 題 名

フラクタル境界を有する振動系のスペクトル
分布およびモードに関する研究

学位論文内容の要旨

複雑な構造を有する系の動的性質の研究が、理工学の様々な分野において近年高い関心を集めている。自然界における多くの対象が強い不規則性をもっていることや、ガラス、磁性体、高分子材料などランダム構造を有する材料が工学的に広く利用されていることもその理由の1つである。このようなランダム系に対する理解は、“フラクタル”という概念が導入されたことによって急速に深まった。フラクタルとは自己相似性を有する構造の総称的概念であり、その構造を特徴づけるフラクタル次元を用いることでランダム系を定量的に扱えるようになった。特にフラクタル系の振動問題は、凝縮体の熱的性質や熱伝導特性など多くの物理的性質の理解に重要な役割を担っていると考えられている。

境界のフラクタル次元が D_f であるドラム (フラクタル・ドラム) の積分状態密度は、固有振動数を ω とすると $I_{\text{fix}}(\omega) = (S/4\pi)\omega^2 - B_f\omega^{D_f}$ (振動数 $\omega \rightarrow \infty$) で表されるであろうということは、数学的な観点から示唆されてきた。ここで S はドラムの面積、 B_f は境界の形状に依存する正の定数である。この予想式は Berry-Lapidus (BL) conjecture と呼ばれている。フラクタルのような複雑な構造の振動問題を解析的に扱うことは困難であり、そのためにこの予想 (conjecture) の物理的な意味付けや、検証は行われていないのが現状であった。

本論文は大規模な数値解析を利用してフラクタル次元 D_f の境界を有するドラムの振動特性一般を調べ、上記の BL conjecture の正当性を検証するとともに、その物理的な意味を明らかにすることを試みたものである。

第1章は序論で、フラクタル境界を有する振動系に対する研究の背景および重要性を簡単に述べている。またフラクタル・ドラムの振動特性に関するこれまでの研究経過などを概説している。

第2章では、まずドラムの振動に関する一般論を展開した後、振動を記述しているヘルムホルツ方程式を導出している。またヘルムホルツ方程式とシュレーディンガー方程式、および電磁波を記述するマクスウェルの波動方程式との関係について述べている。2次元

矩形ドラムにおける解析例を用いて固有振動数と固有モードについて解説している。また系の動的性質を特徴づけるのに重要な物理量であるスペクトル状態密度、および積分状態密度を定義している。

第3章では初めに、ドラムの境界が十分滑らかな場合の積分状態密度に関する Weyl の漸近公式を示し、そのグリーン関数を用いた導出、および2次元矩形ドラムにおける数値的検証を行っている。その後で Weyl-Seeley-Pham(WSP) の漸近公式を紹介している。

第4章ではフラクタルの概念とフラクタル・ドラムについて詳述している。WSP 漸近公式をフラクタル境界を有するドラムの場合に拡張した Berry および Lapidus の理論が紹介され、BL conjecture の表式を導出している。

第5章では、これまでに行われているフラクタル・ドラムに関する実験例および数値計算例を紹介し、その計算結果および問題点について指摘している。その後で本論文の目的について改めて述べている。

第6章では連続体と離散格子系の対応関係を調べることによって、BL conjecture を格子系でも利用できるように拡張している。また、本論文で用いた数値計算法である強制振動子法を解説し、アルゴリズムの正当性の検証を2次元正方形ドラムにおいて行っている。本研究で用いたフラクタル・ドラムのシステムおよび数値計算パラメータを紹介し、積分状態密度の数値計算結果が示されている。そして BL conjecture の正当性、および conjecture が成立する振動数領域に関する考察が述べられている。

第7章では、強制振動子法を用いて固有モードを計算するアルゴリズムを示し、固定端境界条件のフラクタル・ドラムにおける振動モードを計算し、図示している。また自由端境界条件の場合の固有モードの中に、境界付近で大きな振幅をもつ振動モードが含まれていることを明らかにしている。このモードは BL conjecture の補正項に関連した振動モードであることが示されている。

第8章では、本研究によって得られた結論を総括するとともに、複雑な形状の境界を有する様々な物理現象への適用可能性を述べている。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 中 山 恒 義
副 査 教 授 田 村 信 一 朗
副 査 教 授 徳 田 直 樹

学 位 論 文 題 名

フラクタル境界を有する振動系のスペクトル 分布およびモードに関する研究

複雑な構造を有する系の動的性質の研究が、理工学の様々な分野において近年高い関心を集めている。自然界における多くの対象が強い不規則性をもっていることや、ガラス、磁性体、高分子材料などランダム構造を有する材料が工学的に広く利用されていることもその理由の1つである。このようなランダム系に対する理解は、“フラクタル”という概念が導入されたことによって急速に深まった。フラクタルとは自己相似性を有する構造の総称的概念であり、その構造を特徴づけるフラクタル次元を用いることでランダム系を定量的に扱えるようになった。特にフラクタル系の振動問題は、凝縮体の熱的性質や熱伝導特性など多くの物理的性質の理解に重要な役割を担っていると考えられている。

固有振動数を ω 、変位を $u(x, y)$ とする2次元ドラムの振動はヘルムホルツ程式($\nabla^2 + \omega^2$) $u(x, y) = 0$ で表される。境界のフラクタル次元が D_f であるドラムの積分状態密度は、 $I_{\text{fix}}(\omega) = (S/4\pi)\omega^2 - B_f\omega^{D_f}$ (振動数 $\omega \rightarrow \infty$) で表されるであろうということは、数学的な観点から示唆されてきた。ここで S はドラムの面積、 B_f は境界の形状に依存する正の定数である。この予想式は Berry-Lapidus(BL) conjecture と呼ばれている。フラクタルのような複雑な構造の振動問題を解析的に扱うことは困難であり、そのためにこの予想(conjecture)の物理的な意味付けや、検証は行われていないのが現状であった。しかしながら、計算機の急速な発達によって大規模な数値計算が可能になり、フラクタル構造のような複雑系の動的性質に対する実証的な研究を行うことが可能となってきた。

本論文は、フラクタル次元 D_f の境界を有するドラムの振動解析を大規模な数値計算により行い、以下の点について明らかにすることを目的としたものである。(1) 積分状態密度の振る舞いを調べ、BL conjecture の正当性を検証する。(2) BL conjecture が成り立つ振動数領域を明らかにする。(3) 補正項の物理的な意味を明らかにする。フラクタル・ドラムのように複雑な形状を持つ系の振動解析を行うには、極めて大きな自由度を有する系を

扱わなければならない。特に BL conjecture を検証するためには、各固有振動モードだけでなく全振動数領域における状態密度を計算する必要がある。そのために本研究では系の自由度に比例したメモリしか必要としない“強制振動子法”と呼ばれる数値計算アルゴリズムを適用し、研究を行っている。

本研究の結果、以下の事柄が明かとなった。(1) BL conjecture を数値的に実証することに初めて成功した。(2) BL conjecture は、フラクタル境界を特徴づける最小の長さ l よりも短い長さの波長 λ の振動が励起されているときに成立する。(3) 自由端境界のフラクタル・ドラムにおいて、境界部分に局在した振動モード、すなわち “edge modes” を見いだした。

本論文は、以下のように構成されている。第2章では、まずドラムの振動に関する一般論を展開し、ヘルムホルツ方程式、および固有振動数と固有モードについて説明している。また、系の動的性質を特徴づける重要な量である状態密度、および積分状態密度を定義している。第3章は Weyl の漸近公式を示し、グリーン関数を用いた導出、および2次元矩形ドラムにおける数値的検証を行い、その後で Weyl-Seeley-Pham(WSP) 漸近公式を紹介している。第4章ではフラクタルの概念とフラクタル・ドラムについて説明し、WSP 漸近公式をフラクタル境界の場合に拡張した Berry および Lapidus の理論が紹介されている。第5章では、これまでに行われているフラクタル・ドラムに関する実験例および数値計算例を紹介し、その後で本論文の目的について改めて述べている。第6章では連続体と離散格子系の対応関係について考察している。また、本論文で用いた数値計算法である強制振動子法を解説し、フラクタル・ドラムにおける積分状態密度の数値計算結果、および考察が述べられている。第7章では、強制振動子法で固有モードを計算する方法を示し、フラクタル・ドラムにおける固有モードについて説明が与えられている。第8章は結論である。

これを要するに著者は、不規則な境界、特にフラクタルな境界を有する振動系のスペクトル分布に対する新知見を得たものであり、ランダム系の物性物理学のみならず応用物理学に対して貢献するところ大なるものがある。

よって著者は、北海道大学博士(工学)の学位を授与される資格あるものと認める。