

学 位 論 文 題 名

# Two types of local triviality for the structure of a complex analytic singular foliation

（複素解析的特異葉層構造の構造に関する二種の局所自明性）

## 学位論文内容の要旨

代数幾何学の分野においては空間・写像の特異点の研究は古くから行われていたが、特異葉層構造の場合の特異点の研究は大きく遅れをとっている。特異点集合の構造の研究においては、特異点集合をstratify（層化）し、各stratum（層）に沿った位相的な局所自明性 (local topological triviality) を考えるという手法が古くから一般的であった。本研究における主要なテーマは、この手法を特異点集合の研究の立ち遅れている（複素解析的）特異葉層構造の場合に応用し、特異葉層構造に特有の形の局所自明性と合わせて、葉層構造の局所自明性に関して二つの観点から考察を試みることである。

$M$  を  $n$  次元複素多様体とし、 $\Theta_M = \mathcal{O}_M(TM)$  を  $M$  上の正則ベクトル場の芽の層とする。 $\Theta_M$  の接続 (coherent) な部分層  $E$  が積分可能 (integrable) のとき、 $E$  は  $M$  上の特異葉層構造 (singular foliation) と呼ばれる。 $E$  の特異点集合  $S(E)$  は

$$S(E) = \{p \in M \mid (\Theta_M/E)_p \text{ が } (\mathcal{O}_M)_p \text{-自由ではない}\}$$

で定義され、 $S(E)$  には以下のように解析的集合による“自然な” filtration が考えられる。

$p \in M$  に対し、接空間  $T_p M$  の部分空間  $E(p)$  を

$$E(p) = \{v(p) \mid v \in E_p\}$$

で定める。 $-1 \leq k \leq r$  ( $r$  は  $E$  の階数) なる整数  $k$  に対して、

$$S^{(k)} = \{p \in M \mid \dim_{\mathbb{C}} E(p) \leq k\}$$

とおくと、

$$\begin{array}{ccccccc} S^{(r)} & \supset & S^{(r-1)} & \supset & S^{(r-2)} & \supset & \dots \supset S^{(1)} & \supset & S^{(0)} & \supset & S^{(-1)} \\ \parallel & & \parallel & & & & & & & & \parallel \\ M & & S(E) & & & & & & & & \emptyset \end{array}$$

は  $S(E)$  の解析的集合による filtration を与える。

任意の  $k$  に対する  $S^{(k)}$  の（解析的集合としての）局所構造について、次の定理が成立する。

**定理 (2.5)**  $S^{(k)}$  の各点  $p$  での接錐面 (tangent cone) を  $C_p S^{(k)}$  とすると、 $E(p) \subset C_p S^{(k)}$  となる。

この定理は、D.Cerveau 氏によって示された定理の系として得られるものであるが、

本論文では特異葉層構造が“既約 (reduced)”な場合について、直接的な別証明を与えている。

上記定理の応用として、次の二つの定理が証明される。

定理 (3.11)  $E$  は  $M - S(E)$  上  $r$  次元の非特異葉層構造を定めている。さらに、 $S(E)$  上の各点においても  $r$  より低い次元の積分多様体が存在し、 $M$  はこのような積分多様体 (これを 葉 (leaf) という) の直和 (disjoint union) となる。

定理 (4.1) [葉に沿った解析的局所自明性]  $E$  が既約のとき、 $p$  を  $M$  の任意の点とし、 $p$  を通る  $E$  の葉を  $L(p)$  とすると、 $E$  の構造は  $p$  の近傍で  $L(p)$  に沿って (解析的な意味で) 局所自明である。

定理 (4.1) を適用することにより、次の事実も導かれる。

命題 (4.25)  $E$  が既約ならば、特異点集合  $S(E)$  の余次元は 2 以上である。

このように、特異葉層構造については、各葉に沿っての解析的局所自明性が保証される。ところが  $M = \bigcup_{p \in M} L(p)$  は一般には  $M$  の局所有限な分割ではないので、 $S(E)$  を  $M$  の部分多様体によって局所有限に分割したとき (つまり  $S(E)$  を stratify したとき)、各 stratum に沿っての葉層構造の自明性がいつ成り立つかという問題が生ずる。

この問題では各 stratum に沿っての葉層構造の自明性を考えるので、各 stratum 上で葉の次元が一定になっていることが最低限必要である。本論文においてはまず、そのような  $M$  の stratification はさらに強い条件のもとで必ず存在することを次の定理で証明している。

定理 (5.4), 注意 (5.5)  $M$  上の特異葉層構造  $E$  に対して、 $M$  の Whitney stratification  $S$  で次の条件を満たすものが存在する。

任意の stratum  $X \in S$  は、ある  $S^{(k)} - S^{(k-1)}$  に含まれる。すなわち、各 stratum 上で  $E$  の葉の次元は一定である。

そして、各 stratum に沿っての葉層構造の自明性について、次の定理が得られる。

定理 (6.10) [stratum に沿った位相的局所自明性] 定理 (5.4) によって存在の保証される「各 stratum 上で葉の次元が一定になっているような stratification」がさらに“foliated Verdier 条件”を満たすならば、各 stratum に沿って葉層構造  $E$  は (位相的意味で) 局所自明である。

foliated Verdier 条件の内容についてはここでは触れないが、簡単に言えば、それぞれの stratum の十分近くにある葉の方向に関する記述である。foliated Verdier stratification の存在によって各 stratum に沿った位相的自明性が与えられるような葉層構造の例は実際に見つかっているが、特異葉層構造の場合は空間や写像の場合とは異なった独特な自明性の形が考えられ、どんな葉層構造に対しても foliated Verdier stratification がとれるというわけではないようなので、foliated Verdier stratification が存在しない場合の自明性を考察することが課題として残されている。

# 学位論文審査の要旨

|    |     |    |    |
|----|-----|----|----|
| 主査 | 教授  | 諏訪 | 立雄 |
| 副査 | 教授  | 泉屋 | 周一 |
| 副査 | 助教授 | 石川 | 剛郎 |
| 副査 | 助教授 | 河澄 | 響矢 |
| 副査 | 助教授 | 中居 | 功  |

## 学位論文題名

### Two types of local triviality for the structure of a complex analytic singular foliation

(複素解析的特異葉層構造の構造に関する二種の局所自明性)

代数幾何学、複素解析幾何学の分野においては空間、写像の特異点の研究は古くから行われていたが、これに比し、葉層構造の特異点の研究は十分な発展を見ていない。特異点集合の構造の研究においては、特異点集合を stratify (層化) し、各 stratum (層) に沿った位相的な局所自明性を考えるという手法が一般的であった。本論文においては、この手法を複素解析的特異葉層構造の場合に応用し、特異葉層構造に特有の形の局所自明性と合わせて、葉層構造の局所自明性に関し、二つの観点から考察されている。

まず、複素多様体上の葉層構造の特異点集合に対する “tangency lemma” を基礎に、その多様体の葉層構造の葉 (leaf) への分解、各葉に沿っての葉層構造の解析的局所自明性が証明されている。更に、複素解析的特異葉層構造に関する基本的な事として、多様体の Whitney stratification で葉層構造と “compatible” なものが存在することが示されている。

位相的な局所自明性に関しては上のような stratification に対し空間の場合の Verdier の条件を一般化した “foliated Verdier condition” の概念を導入し、この条件の下での各 stratum に沿った位相的な局所自明性が証明されている。以上の結果はこれまで特別な場合に得られていた結果を一般の場合に統一的に示したものである。

これを要するに、著者は、複素多様体上の葉層構造の特異点集合の構造に関する基本的かつ一般的結果を得たものであり、これらは複素解析的葉層構造の解明に極めて有用で、複素解析幾何学に貢献するところ大なるものがある。

よって著者は、北海道大学博士 (理学) の学位を授与される資格あるものとみとめる。