博士（理　学）　本　田　知　亮

学位論文題名

Some indices of singularities of holomorphic foliations on complex surfaces.

（複素曲面上の複素解析的葉層構造の特異点のいくつかの指数について）

学位論文内容の要旨

本稿では複素曲面（二次元複素多様体）上の複素解析的葉層構造の特異点に関する三つの指数（Poincaré-Hopf index, Baum-Bott index, tangential index）について考察する。以下、葉層構造とはすべて複素解析的なものを言うこととする。Poincaré-Hopf index はベクトル場に関しては古くからよく知られているが、1970年に P. Baum, R. Bott は Poincaré-Hopf index を葉層構造の法層の Chern 類の局所化とみなし、一連の留数として拡張した。底空間を二次元に限る場合には、その一連の留数は Poincaré-Hopf の場合以外には、本質的には一種しか存在しない。これらの留数が葉層構造の特異点の局所的な振る舞いのみによるものであるのに対して、tangential index は葉層構造と底空間上の解析的曲線の「接し方」に関して定まる指数である。これは 1996 年に M.Brunella によって一般的に定められ、底空間がコンパクトであるときにその和を与える指数定理が彼によって示されていた。そして、筆者が解析的曲線のコンパクト性のみを仮定した別証明を与えた。

Xを複素曲面とする。X上の一次元葉層構造 $\mathcal{F}$とは Xの接層Θ_Xの階数 1 の部分層 $\mathcal{F}$のことをいう。$\mathcal{F}$には自然に正則直線束 Fが対応し、TXを Xの接束として、自然な束写像 $F \to TX$が存在する。この束写像が単射ではない Xの点の集合を $\mathcal{F}$の特異点集合という。そして、特異点集合が孤立点のみからなる場合、葉層構造 $\mathcal{F}$は reduced と言われる。本稿では葉層構造はすべて reduced なものとする。

$\psi(x,y)$ を二変数斉次対称多項式、$\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$, 二変数多項式 $\tilde{\psi}(x,y)$ を $\psi(x,y) = \tilde{\psi}(\sigma_1, \sigma_2)$ によって定める。このとき、葉層構造 $\mathcal{F}$の特異点集合の元 p と ψ に関して、Baum-Bott 留数が定まる。この留数は $\mathcal{F}$の p の近傍での挙動によって定まる複素数であって、更に、底空間 Xがコンパクトであるときにはその和は仮想束$TX - F$の特性類 $\psi(TX - F)$ に等しい。ここで)、c_iを仮想束$TX - F$ の i 次 Chern 類として、$\psi(TX - F) = \tilde{\psi}(c_1, c_2)$ である。特に、$\psi = \sigma_1^2$, σ_2の場合が重要であり、後者の場合、Baum-Bott 留数は Poincaré-Hopf index に一致する。前者の場合の留数を Baum-Bott index と呼ぶことにする。

Cを底空間 X上の（被約）解析的曲線とする。Cは $\mathcal{F}$によって不変な曲線ではな

い、つまり、f, vをそれぞれ$C, \mathcal{F}$の局所定義関数、局所生成元として、$v(f) \notin (f)$であると仮定する。Cの一般の点では$\mathcal{F}$の葉はCと横断的に交わっているが、Cの接線方向と葉の方向が一致する点も存在する。そこでCと$\mathcal{F}$の接点集合を、葉とCの方向が一致する点の集合及び、Cと$\mathcal{F}$の普通の意味での特異点集合との和集合とする。この接点集合Tは$v(f)=0$で特徴つけられる。接点集合は孤立点のみからなると仮定する。接点集合の各点pに関して、そこでの接し方の度合いを測る指数として、tangential index が定められる。NをCの非特異点集合の法束の、Cの近傍への正則な拡張とすると、この tangential index は仮想束$N-F$の一次 Chern 類$c_1(N-F)$の接点集合への局所化と捉えることができる。実際、Cがコンパクトであれば(Xのコンパクト性は仮定しない)、その和は$c_1(N-F) \frown [C]$に一致する。ここで、$[C]$はCの基本類である。

一方、X上の余次元 1 の葉層構造$\mathcal{E}$をXの余接層Ω_Xの階数 1 の部分層として定める。この場合も前の場合と同じく、正則直線束Eが対応し、自然な束写像$E \to T^*X$が存在する。この束写像が単射にならないXの点の集合を特異点集合という。それが孤立点のみからなる場合に$\mathcal{E}$は reduced であると言う。底空間が二次元で reduced なもののみを考えている場合には、これら二つの葉層構造は一対一に対応する。更に、Eを$\mathcal{E}$に対応するベクトル束($\mathcal{E}$の余法束という)として、$\mathcal{F}$と$\mathcal{E}$が互いに対応するものであるとすると、葉層構造の接束と余法束の間には、K_XをXの標準束として、$E = F \otimes K_X$なる関係がある。この関係を用いて、Fを用いて述べられている上述の指数定理をEで書き下すことができる。

φをX上の有理型関数とする。微分$d\varphi$を考えることによって、余次元 1 の葉層構造を定めることができる。この葉層構造はφの臨界点や不定点をその特異点集合として含み、各葉はφのファイバーとなっている。この余次元 1 の葉層構造に対して本稿では上述の三種の指数及び指数定理を適用している。有理型関数の極因子上にはない特異点に関しては Poincaré-Hopf index, Baum-Bott index ともに簡単に計算できる。極因子上にある特異点の Baum-Bott index も本稿では計算してあり、また Poincaré-Hopf index に関してはいくつかの場合を計算してある。これは、二変数の多項式から定まる、射影曲面上の葉層構造や、その modification の指数を計算するのに有用である。これによって、二変数多項式の無限遠方での挙動に関する公式を得ることができる。一方、一般の底空間で、解析的曲線CとC上で定数ではない有理型関数による葉層構造に関する tangential index が完全に計算される。C上での有理型関数とはC上で定数ではなく、Cの近傍において有理型な関数の制限であると考えるのがもっとも自然であるが、この tangential index はこのように定めた “C上の有理型関数” の臨界点での位数を与えると考えられる。実際、Cが非特異な場合、tangential index はその有理型関数のCへの制限の各点での位数と一致している。Cがコンパクトな場合、指数定理はそれら位数の和を与える公式となっているのである。

最後に本稿では、ベクトル場の blowing-up に関して述べて、tangential index が blowing-up によってどのような挙動を示すのかを表す公式を導いている。

学位論文審査の要旨

主　査	教　授	諏 訪 立 雄
副　査	教　授	泉 屋 周 一
副　査	助教授	石 川 剛 郎
副　査	助教授	河 澄 響 矢
副　査	助教授	中 居 　 功

学 位 論 文 題 名

Some indices of singularities of holomorphic foliations on complex surfaces.

（複素曲面上の複素解析的葉層構造の特異点のいくつかの指数について）

近年、複素解析的葉層構造の特異点に付随した不変量としての指数、留数に関する研究が盛んに行われている。これらを具体的な場合に明らかにすることは重要な問題である。

本論文では複素曲面 (二次元複素多様体) 上の複素解析的葉層構造の特異点に関する三つの指数 (Poincaré-Hopf index, Baum-Bott index, tangential index) について考察されている。Poincaré-Hopf index はベクトル場に関しては古くからよく知られているが、P. Baum, R. Bott は Poincaré-Hopf index を葉層構造の法層の Chern 類の局所化とみなし、一連の留数として拡張した。本論文ではまず葉層構造が有理型関数から定められる場合にこの留数を解析し、留数公式を得た。応用として、2変数多項式が与えられたとき、その定義域をコンパクト化した空間上に自然に定められる葉層構造に対する指数公式が得られ、これは多項式の無限遠での挙動を解明するうえで有用なものである。これは、Lê Dũng Tráng の問題の解答を与えるものでもある。

もう一つの指数として、複素曲面上の葉層構造の非不変曲線に関する指数 (tangential index) が考察されている。tangential index は葉層構造と底空間上の解析的曲線の「接し方」に関して定まる指数で、M. Brunella によって導入され、その和を与える指数定理が彼によって示されていた。本論文ではこの定理の更に一般の場合にも通用する見通しの良い別証明が与えられている。また、この指数を特異点の blow-up に依り具体的に計算出来る式が与えられており、これを用いると原理的にすべての場合にこの指数を計算できることになる。特に、葉層構造が有理型関数から定められる場合に具体的公式が得られている。

これを要するに、著者は、複素曲面上の葉層構造に対し種々の興味深い公式を得たものであり、これらは複素解析的葉層構造の解明に極めて有用で、複素解析幾何学に貢献す

るところ大なるものがある。

よって著者は、北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格あるものとみとめる。