

学 位 論 文 題 名

On Three Possible Non-Canonical Quantization Schemes
and Their Physical Implications

(3つの可能な非正準量子化法とそれらの物理的帰結について)

学位論文内容の要旨

非自明な空間上では、曲がっていない空間上での量子化、つまり正準量子化が使えないことが知られている。そして、正準量子化以外の量子化を使って非自明な空間上での量子力学を考えると、点粒子はあたかもモノポールが存在しているような磁場を感じることが理論的に予言されている。例えば、1次元の円周上を運動する点粒子の量子論を考えると、あたかも円の中心にフラックスが立っているような磁場を感じて運動することが知られている。そして、その影響は、数学的には配位空間の1次のホモトピー群の影響からきているということがわかっている。また、2次元球面上に拘束されている点粒子は、あたかも球の中心にディラック・モノポールが存在しているかのように運動することが知られている。

一方、近年テクノロジーの発達によって、曲がった空間や非自明な空間上の量子論を実験的に検証しようという気運が高まりつつある。しかし、そのためには非自明な空間上の量子力学ではなく、量子論的場の理論を理論的に構成する必要がある。そして、非自明な空間上の量子力学の場合と同様に場の理論においても配位空間のホモトピー群が重要な役目を担うであろうことが予想される。

以上のような背景のもと、正準量子化法とは異なる量子化法に基づいてそれらの3つの物理的帰結について考察した。1つ目は、量子力学のレベルでの議論である。曲がった空間上を運動する点粒子に働く力の形を論ずる。この議論では、正準量子化法とは異なる同時刻交換関係が最初に仮定される。2つ目は、拘束系の量子化の問題である。拘束系では、しばしば系が等価的に非自明な多様体になる。拘束系では、多くの場合ディラックの量子化法が用いられるが、別の量子化法として、シュウインガーの量子化法と呼ばれるものがある。ここでは、新しいシュウインガーの量子化法が提案され、それがディラックの量子化と等価であることが示される。3つ目は、配位空間のトポロジーが場の量子論においてどのような量子論的效果を与えるかという考察である。SU(2) principal chiral model を例にとり、非同値量子化法の手続きに基づいて、その量子効果について考察される。

この論文は、5章から構成される。1章は、導入部にあたり非自明な空間上の量子論の重要性について言及されている。2、3、4章はそれぞれ、別個の3つのモデルに基づく量子化に関する議論である。

2章において、曲がった空間の上を運動する点粒子の量子化、及び、その応用としての「ファインマンの証明」の拡張について議論される。「ファインマンの証明」と呼ばれる議論は、ラグランジアンやハミルトニアンを用いずに、正準交換関係とは異なる同時刻交換関係のみを用いて量子力学的に許される力の形を決めようとするものである。すでに、曲がった空間の上を運動する点粒子への拡張は試みられているが、それは物理量の変換性やオペレーターの順序の関する議論がはっきりとしていないという欠点があった。この章では、その点を明確にした上で量子力学的に許される力の形を求めている。

3章は、シュウインガーの量子化と呼ばれる量子化法に関する議論である。一般に、シュウインガーの量子化法とは、系の対称性から同時刻交換関係を定める量子化法である。この章では、新しいタイプのシュウインガーの量子化法が提案されている。さらに、この新しく提案されたシュウインガーの量子化法が、非拘束系では、正準量子化法の結論と一致し、第2種拘束系では、一般に用いられているディラックの量子化法による結論と一致することが証明される。ま

た、第1種拘束系においても、ゲージ条件を課した後では通常用いられている量子化の手続きのよる結論と一致することがわかる。ディラックの量子化法では、ハミルトニアンと拘束条件との間の交換関係などを計算する必要がある、複雑な力学系においては一般にその計算が複雑になることが多い。一方、ここで提案された量子化法では、我々はハミルトニアンを直接取り扱う必要はなく、基本的に拘束条件だけを扱えばよい。この点が、この方法のメリットである。その代わり、基本的な交換関係を見つけるためには、十分な量の対称性を見つける必要がある。複雑な系では対称性が発見しにくい場合があり、その時、基本的な交換関係を求められない可能性がある点が、欠点である。

4章では、量子場の理論において、配位空間の非自明さがどのように理論に影響を与えるかについて、 $SU(2)$ principal chiral model を例にとって考察した。 $SU(2)$ principal chiral model と呼ばれるモデルは、 $(1+1)$ 次元の $SU(2)$ 群に値を持つ場の理論である。このモデルの配位空間のトポロジーを、ホモトピー群を用いて適当な境界条件のもとで考察すると、0次、1次のホモトピー群は自明であり、2次のホモトピー群が非自明なものとしてはじめて現れることがわかる。3次以上の高次のホモトピー群も非自明であるが複雑になるので、この論文では2次のホモトピー群までについて考察している。

場の理論において、配位空間に非自明な2次のホモトピー群が存在するということは場のゼロ・モードだけを見ると、2次元球面上の量子力学と等価であることを意味する。2次元球面上の量子力学においては、点粒子はディラック・モノポールのポテンシャルが誘導されることから、非同値量子化によってわかっている。したがって、 $SU(2)$ principal chiral model においても誘導されたポテンシャル中は、そのゼロ・モード部分にディラック・モノポールを含んでいなければならない。そして、そのようなポテンシャルが Wess-Zumino-Witten 項に他ならない。

2次のホモトピー群は加法群に同値である。したがって、場を用いた整数を与える積分が存在するはずであり、実際それはよく知られた巻き付き数の公式に他ならないことがわかる。この公式の加法的性から、一般的な配位の分解が可能になる。一般の配位 g は2つの積、 $g_n \hat{g}$ で書け、そのうち g_n がゼロ・モード部分に相当する。 g_n は、具体的にその形を決めることが可能であり、また、 $U(1)$ ゲージ変換に対して不変であることがわかる。 g_n は $SU(2)$ に値を持ち、 $U(1)$ のゲージ自由度を持っているのだから、その物理的自由度は、 $SU(2)/U(1) \simeq S^2$ である。そして、標的空間が S^2 である場合は、オイラー角によるパラメータ化が適当である。

以上のことを知って、Wess-Zumino-Witten 項に、一般の配位 g の分解を代入し、そのゼロ・モード部分について計算すると、角度座標表示によるディラック・モノポールのポテンシャルそのものになることが示される。さらに、Wess-Zumino-Witten 項以外に、ローレンツ不変で局所的であり、かつディラック・ポテンシャルを含む項はあり得ないので、結局、配位空間の非自明なトポロジーが Wess-Zumino-Witten 項を誘導したと結論づけられる。

最後の5章は、結論および議論にあてられる。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 河 本 昇
副 査 教 授 石 川 健 三
副 査 助 教 授 中 山 隆 一
副 査 助 教 授 加 藤 幾 芳

学 位 論 文 題 名

On Three Possible Non-Canonical Quantization Schemes and Their Physical Implications

(3つの可能な非正準量子化法とそれらの物理的帰結について)

力学系に量子化をどの様に行うかは、量子力学が確立されて以来の問題で有るが、この問題を現代的な視点で、新しい観点から取り上げる事が本論文の研究テーマである。特に曲がった空間の上での量子化の問題を、色々な角度から調べているのがその特徴である。本論文では3通りの方法によって量子化の問題を調べ特にソリトン解としての、モノポールとトポロジーと量子化の問題の関係を明らかにした。1つ目は、量子力学レベルでの議論であり、2つ目では拘束系の問題の量子化と非自明な空間での量子化の問題との関連を明らかにした。最後に2次元のSU(2) principal chiral model を例にとり、場の理論としての曲がった空間の上での量子化とモノポールの関係をホモトピー群の議論から明らかにした。特に最後の仕事は、曲がった空間の上での量子化を場の理論に拡張して議論したと言う点が注目され場の理論に応用した例としては初めての例である。

上記の1、2 に関してはProgress of Theoretical Physics 誌、Vol.93, No.4, pp.823-829 (1995) (with K.Fujii) に発表した”Quantum-Mechanically Allowed Form of Force in General Relativistic Particle Motion” 及び同誌の Vol.96, No2, pp.437-447 (1996) (with N.Ogawa, K.Fujii, N.Chepildo and T.Okazaki) に発表されている”Equivalence between Schwinger and Dirac scheme of quantization” の論文が元になっており、曲がった空間での量子化の問題に関して早い時期に研究した論文として注目される。3に関しては、高エネルギー加速器研究機構田無分室の筒井泉氏との共同研究が元になっております。

結論として、本論文は曲がった空間の上での量子化の問題を、色々な角度から調べ、特に場の理論にその手法を応用しトポロジカルな観点からモノポールとの関係を明らかにした点は新しい視点を与えたものとして評価される。よって審査員一同は申請者が博士(理学)の学位を受けるに十分な資格があるものと認めた。